Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2023–24

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 10η σειρά (Διάλεξη 19+20)

Ανασκόπηση

- **Το μητρώο της ορθογώνιας προβολής** Έστω $\mathbf{a}$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ και W ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

  (1) Η προβολή ενός διανύσματος $\mathbf{u}$ επί του $\mathbf{a}$, $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ υλοποιείται μέσω του μητρώου

  $$P = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}} \qquad \text{ώστε} \qquad \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = P\mathbf{u}.$$

  (2) Η προβολή ενός διανύσματος $\mathbf{u}$ επί του W, $\operatorname{proj}_W \mathbf{u}$ υλοποιείται μέσω του μητρώου

  $$P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}} \qquad \text{ώστε} \qquad \operatorname{proj}_W \mathbf{u} = P\mathbf{u}, \tag{1}$$

  όπου A είναι ένα μητρώο με στήλες τα διανύσματα μιας βάσης του W.

- Έστω P ένα μητρώο.

  (1) Το P είναι μητρώο **προβολής** αν και μόνο αν $P = P^2$.

  (2) Το P είναι μητρώο **ορθογώνιας προβολής** αν επιπλέον $P^{\mathrm{T}} = P$.

- **Άσκηση 3 παρακάτω.** Εάν P είναι μητρώο ορθογώνιας προβολής στο $\mathbb{R}^m$ επί υπόχωρου W, τότε

  (1) $\operatorname{range} P = W$.

  (2) $\operatorname{range}(I - P) = W^{\perp}$.

  (3) $\operatorname{range}(I - P) = \operatorname{null} P$.

  (4) $\mathbb{R}^m = \operatorname{range} P \oplus \operatorname{null} P$ και $\operatorname{range} P \perp \operatorname{null} P$.

Ασκήσεις

1. Εάν για ένα $n \times n$ μητρώο A ισχύει $A^2 = A$ και $\operatorname{rank} A = n$, δείξτε ότι $A = I$.

2. Έστω A ένα $n \times 3$ μητρώο του οποίου οι στήλες είναι ορθογώνιες.

   (α΄) Εάν η κάθε στήλη έχει μέτρο 4, ποιο είναι το μητρώο $A^{\mathrm{T}}A$;

   (β΄) Εάν οι στήλες έχουν μέτρα 1, 2 και 3 αντίστοιχα, ποιο είναι το μητρώο $A^{\mathrm{T}}A$;

3. ♣ Άσκηση 17 §4.2 Strang. Αν $P^2 = P$ δείξτε ότι $(I - P)^2 = I - P$. Όταν ο P προβάλλει επί του χώρου των στηλών του P, $\operatorname{range} P$, ο $I - P$ προβάλλει επί του ________.

4. Άσκηση 1 §4.2 Strang. Προβάλετε το $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ επί της ευθείας που διέρχεται από το $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

5. Άσκηση 3 §4.2 Strang. Στο πρόβλημα Άσκηση 1 §4.2 Strang βρείτε το μητρώο προβολής.

6. Να βρεθεί το μητρώο ορθογώνιας προβολής P επί του υπόχωρου W ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα
$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. Δίνονται τα διανύσματα
$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$
   (α΄) Να βρεθούν τα μητρώα ορθογώνιας προβολής P_1 και P_2 αντίστοιχα επί των ευθειών δια των $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$.
   (β΄) Δείξτε ότι αν $\mathbf{u} \in \operatorname{range} P_1$ και $\mathbf{v} \in \operatorname{range} P_2$, τότε $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
   (γ΄) Υπολογίστε το γινόμενο $P_1 P_2$ και εξηγήστε γιατί είναι αυτό που είναι.

8. Αν $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα δείξτε ότι το μητρώο $Q = I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}$
   (α΄) Είναι ορθογώνιο.
   (β΄) Ικανοποιεί τη σχέση $Q^2 = I$.
   (γ΄) Ανακλά κάθε διάνυσμα ως προς την ευθεία η οποία είναι ορθογώνια στο $\mathbf{q}$, δηλαδή κατά μήκος του $\mathbf{q}^{\perp} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

9. Εάν Q_1 και Q_2 είναι $n \times n$ ορθογώνια μητρώα δείξτε ότι το γινόμενο $Q_1 Q_2$ είναι επίσης ορθογώνιο μητρώο.

10. Να βρεθεί η πλησιέστερη ευθεία (των ελαχίστων τετραγώνων) στα σημεία $(0, 6)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$.

ΛΥΣΕΙΣ

3. Αν το P είναι ένα $n \times n$ μητρώο ορθογώνιας προβολής τότε $P^2 = P$ και $P^{\mathrm{T}} = P$, βλέπε (1). Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε
$$\mathbf{x} = P\mathbf{x} + \mathbf{x} - P\mathbf{x} = P\mathbf{x} + (I - P)\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n = \operatorname{range}(P) + \operatorname{range}(I - P),$$
επιπλέον
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \operatorname{range}(P) \oplus \operatorname{range}(P)^{\perp} \\ \mathbb{R}^n &= \operatorname{range}(P) \oplus \operatorname{null}(P^{\mathrm{T}}) = \operatorname{range}(P) \oplus \operatorname{null}(P) \end{aligned}$$
με
$$\operatorname{range}(P)^{\perp} = \operatorname{null}(P^{\mathrm{T}}) = \operatorname{null}(P).$$
Δείχνουμε ότι $\operatorname{range}(I - P) = \operatorname{range}(P)^{\perp}$. Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε
$$\begin{aligned} \langle P\mathbf{u}, (I - P)\mathbf{v} \rangle &= \langle P^2\mathbf{u}, (I - P)\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle P\mathbf{u}, P^{\mathrm{T}}(I - P)\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle P\mathbf{u}, P(I - P)\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle P\mathbf{u}, (P - P^2)\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle P\mathbf{u}, (P - P)\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle P\mathbf{u}, P\mathbf{v} \rangle - \langle P\mathbf{u}, P\mathbf{v} \rangle \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$
για όλα τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του $\mathbb{R}^n$, γεγονός που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. Επομένως
$$\operatorname{range}(I - P) = \operatorname{range}(P)^{\perp} = \operatorname{null}(P^{\mathrm{T}}) = \operatorname{null}(P)$$
ισοδύναμα το $I - P$ προβάλλει επί του μηδενόχωρου του P.