Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2023–24

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 9η σειρά (Διάλεξη 17+18)

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$$

με b να είναι μια πραγματική παράμετρος.

(α΄) Είναι το μητρώο A αντιστρέψιμο;

(β΄) Να βρεθούν ο χώρος στηλών, ο χώρος γραμμών και ο μηδενόχωρος του A.

(γ΄) Για ποιά b το σύστημα έχει λύση ή λύσεις;

2. (Ιούνιος 2018) επιλεξτε και κυκλωστε αναλογα. Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Η τάξη του, $\operatorname{rank} A$, είναι: 1 2 3

3. (Ιούνιος 2018) Αν για το μητρώο A το R είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(α΄) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών $\operatorname{range} A$ του A.

(β΄) Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο $\operatorname{null} A$ του A.

(γ΄) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο γραμμών $\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$ του A.

(δ΄) Ποιά είναι η διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου $\operatorname{null} A^{\mathrm{T}}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(ε΄) Αν για $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ το $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι μια λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος.

4. (Σεπτέμβριος 2018) μαυριστε αν η εκφραση ειναι αληθης. Για $A \in \mathbb{R}^{n\times 5}$ θεωρούμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

☐ Αν $\operatorname{rank} A = n$, τότε $n < 5$.

☐ Αν $\operatorname{rank} A = 5$, τότε $\operatorname{range} A = \mathbb{R}^n$.

☐ Αν το σύστημα έχει λύση για κάθε $\mathbf{b}$, τότε $5 \geq n$.

☐ Αν για $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ είναι $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, τότε $\operatorname{rank} A \geq 5$.

5. (Ιούνιος 2019) Εάν R είναι η **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** για το A, όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(α΄) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών του A.

(β΄) Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο του A.

(γ΄) Να βρεθεί η λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

6. (Σεπτέμβριος 2019) Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(α΄) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών του A.

(β΄) Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο του A.

(γ΄) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο γραμμών του A.

Λύση της 1

Η **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** (ακμ) του A περιέχει και παρέχει τις πληροφορίες που μας ενδιαφέρουν. Θεωρούμε λοιπόν το επαυξημένο μητρώο $\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ και εφαρμόζουμε τη διαδικασία της απαλοιφής

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & b+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 & \mathbf{b}' \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Με $\mathbf{c}_j$ και $\mathbf{c}'_j$, $j = 1,2,3$ συμβολίζουμε τις στήλες του A και R_0, αντίστοιχα, και με $\mathbf{r}_j$ και $\mathbf{r}'_j$, $j = 1,2,3$ τις γραμμές του A και R_0.

1. Στο R_0 (αγκμ) βλέπουμε δύο οδηγούς. Τί σημαίνει ή τί συνεπάγεται αυτό το αποτέλεσμα;

   (i) Το R_0 άρα και το A έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες

   $$2\mathbf{c}'_1 + \mathbf{c}'_2 = \mathbf{c}'_3 \;\Rightarrow\; 2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_3$$

   άρα το A δεν αντιστρέφεται.

   (ii) Το R_0 έχει μια μηδενική γραμμή, άρα αν ξεκινούσαμε από το μητρώο $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$ δεν θα μπορούσαμε ποτέ με απαλοιφή να καταλήξουμε σ' ένα μητρώο $\begin{pmatrix} I & B \end{pmatrix}$, κατά συνέπεια τέτοιο B, το αντίστροφο του A^{-1}, δεν υπάρχει.

   (iii) $R_0 \neq I$, ισοδύναμα το A δεν είναι γραμμοϊσοδύναμο με το ταυτοτικό μητρώο I, επομένως το A^{-1} δεν υπάρχει.

2. Από το (α΄) **ο χώρος στηλών** του A παράγεται από τις δύο πρώτες στήλες του δηλαδή από τα διανύσματα $\mathbf{c}_1$ και $\mathbf{c}_2$, τα οποία αποτελούν και μια βάση του, έτσι

   $$C(A) = \text{range}\, A = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Το R_0 έχει μια μηδενική γραμμή, την τρίτη, άρα τόσο το R_0 όσο και το A έχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές, δηλαδή υπάρχουν σταθερές λ_1, λ_2 ώστε

   $$\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3.$$

(Η ισότητα ισχύει για $\lambda_1 = -7$ και $\lambda_2 = 3$.) Έτσι **ο χώρος γραμμών** του A είναι

$$R(A) = C(A^{\mathrm{T}}) = \text{range}\, A^{\mathrm{T}} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Για τον μηδενόχωρο του A λύνουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ισοδύναμα το $R_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, έτσι αν $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, το

$$\left.\begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -2z \\ y &= -z \end{aligned}\right. \qquad \text{έτσι} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια **ο μηδενόχωρος** του A είναι

$$\text{null}\, A = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση **αν και μόνο αν** $\mathbf{b} \in C(A)$, ισοδύναμα υπάρχουν λ, μ ώστε

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda + \mu \\ -\lambda + 3\mu \end{pmatrix}$$

απ' όπου βλέπουμε ότι $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $b = 2$. Έτσι το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν $b = 2$. Σημειώνουμε ότι την τελευταία αυτή πληροφορία την παίρνουμε από την (1), σύμφωνα με ό,τι ξέρουμε από την επίλυση συστημάτων.

♠ Να βρεθεί **η γενική λύση** του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Από την (1), για $b = 2$, παίρνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 - 2z \\ y &= 1 - z \end{aligned}\right.$$

έτσι αν $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι λύση, τότε

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2z \\ 1 - z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$$

Έτσι η **γενική λύση του συστήματος** $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Το τμήμα

$$\mathbf{x}_0 = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι **η γενική λύση του ομοιογενούς συστήματος** $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, και το

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

είναι **μια ειδική λύση του συστήματος** $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Για σταθερό t, έστω $t = 3$, το

$$\mathbf{x} = 3\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-2\\3\end{pmatrix}$$

είναι μια επίσης (ειδική) λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Πράγματι

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\2 & 1 & 5\\-1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

♣ Να βρεθεί ο αριστερός μηδενόχωρος του A.

Η διαδικασία της απαλοιφής υλοποιείται μέσω του πολλαπλασιασμού με στοιχειώδη μητρώα ως

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} A = R_0$$

απ' όπου πολλαπλασιάζοντας βρίσκουμε $LA = R_0$, όπου

$$L = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\7 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Έτσι με αναστροφή παίρνουμε $(LA)^{\mathrm{T}} = R_0^{\mathrm{T}}$, ισοδύναμα

$$A^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι η τρίτη στήλη του L^{T} πολλαπλασιασμένη από αριστερά με το A^{T} δίνει τη μηδενική στήλη του R_0^{T}, κατά συνέπεια ο **αριστερός μηδενόχωρος** του A είναι

$$\mathrm{null}\, A^{\mathrm{T}} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$