

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 4η σειρά (Διάλεξη 07+08)

1. Με τη μέθοδο της απαλοιφής να επιλυθεί καθένα από τα συστήματα βρίσκοντας την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του αντίστοιχου επαυξημένου μητρώου

$$\begin{array}{l} x + 3y - 2z = -1 \\ \text{(α)} \quad 2x + y + z = 3 \\ \quad \quad -x + 2y + z = -4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3x + y - z = 3 \\ \text{(β)} \quad x + 3y + z = 2 \\ \quad \quad 5x - y - 3z = 4 \end{array}$$

2. Δίνονται τα σημεία $P(1, 2)$, $Q(-1, 6)$, και $R(2, 3)$ στο επίπεδο.

- (α) Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x) = ax^2 + bx + c$ του οποίου το γράφημα περιέχει τα σημεία P , Q , και R .
(β) Υπάρχουν πολυώνυμο $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ των οποίων το γράφημα περιέχει τα σημεία P , Q , και R ;

3. Για το σύστημα

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = a \\ 2x + 3y + 3z = b \\ x + 2y + \mu z = c \end{array}$$

όπου a, b, c, μ είναι πραγματικές παράμετροι, βρείτε σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων ώστε το σύστημα να έχει (i) μοναδική λύση, (ii) άπειρες λύσεις, ή (iii) καμία λύση (**αδύνατο**).

4. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{l} x + 2y + z = a \\ 2x - 2y + 3z = 2 \\ x + 2y + a^2z = b \end{array}$$

όπου a και b είναι πραγματικές παράμετροι. Βρείτε συνθήκες για τις παραμέτρους ώστε το σύστημα να έχει (i) καμία λύση, (ii) μία μόνο λύση, ή (iii) άπειρες λύσεις.

5. ♠ ♣ Κάνοντας χρήση των στοιχειωδών μητρώων να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Λύση της 5

$$\begin{aligned}
 E_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} \\
 E_2 E_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
 E_3 E_2 E_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_4 E_3 E_2 E_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1. Αν $B = E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1$, τότε $BA = I$. Μπορεί να δειχθεί ότι $AB = I$, κατά συνέπεια το B είναι το αντίστροφο του A . Πράγματι

$$\begin{aligned}
 E_2 E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_1 E_2 &= E_2 E_1 \\
 E_3 E_2 E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_4 E_3 E_2 E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B
 \end{aligned}$$

και

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ΒΣ/ΤΜΗΥ&Π