

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 13η σειρά: Γραμμικοί μετασχηματισμοί

1. Τα διανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

αποτελούν μια βάση για το  $\mathbb{R}^3$ . Αν για ένα γραμμικό μετασχηματισμό  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ισχύει

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

να βρεθεί ο τύπος του μετασχηματισμού.

#### Λύση 1

Θέλουμε μια έκφραση της μορφής

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \end{pmatrix}.$$

Επειδή

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

όπου τα  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  αποτελούν τη συνήθη βάση του  $\mathbb{R}^3$ , από γραμμικότητα του μετασχηματισμού έχουμε

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = xT(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) + zT(\mathbf{e}_3), \quad (1)$$

κατά συνέπεια θέλουμε να εκφράσουμε τα  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  μέσω των  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ . Έτσι

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_3 \end{array} \right.$$

οπότε από την (1) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= xT(\mathbf{u}_3) + yT(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) + zT(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \\ &= zT(\mathbf{u}_1) + (y - z)T(\mathbf{u}_2) + (x - y)T(\mathbf{u}_3) \\ &= z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - y) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 2x - y + 2z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

## Λύση 2

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα για τη σύνθεση γραμμικών μετασχηματισμών.

Αν  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει την συνήθη βάση  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  στην  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ , εκφράζει δηλαδή κάθε  $\mathbf{e}_i$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\mathbf{u}_j$ , τότε όπως είδαμε

$$S(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_3, \quad S(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \quad S(\mathbf{e}_3) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

κατά συνέπεια το μητρώο αναπαράστασής του είναι το

$$A_S = (S(\mathbf{e}_1) \ S(\mathbf{e}_2) \ S(\mathbf{e}_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Όμοια το μητρώο αναπαράστασης του  $T$ , όπως δίνεται είναι το

$$A_T = (T(\mathbf{u}_1) \ T(\mathbf{u}_2) \ T(\mathbf{u}_3)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

επομένως το μητρώο του μετασχηματισμού ως προς τις συνήθεις βάσεις του  $\mathbb{R}^3$  και του  $\mathbb{R}^2$  είναι

$$A_T A_S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 2x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

**Παρατήρηση:** Επειδή

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

από την (2) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - y) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - y) \left[ - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= (-x + y + z) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (5x - 4y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$\text{image } T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Έστω  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  να είναι η ορθογώνια προβολή του  $\mathbb{R}^3$  επί του επιπέδου  $W$  με εξίσωση  $x + y + z = 0$ . Να βρεθεί ο τύπος του  $T$ .

## Λύση 1

Δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του επιπέδου είναι τα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

έτσι αν  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)$  το μητρώο προβολής επί του επιπέδου είναι το  $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ . Έχουμε λοιπόν

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

### Λύση 2

Αν  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  είναι μια ορθοκανονική βάση του  $W$ , τότε

$$T(\mathbf{x}) = \text{proj}_W \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2.$$

Παίρνουμε

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. **Θεώρημα αναπαράστασης.** Έστω  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι υπάρχει διάνυσμα  $\xi \in \mathbb{R}^n$  ώστε

$$T(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \xi \rangle$$

για όλα τα  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , όπου  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  είναι το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο.

**Υπόδειξη.** Αν  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  είναι μια βάση στο  $\mathbb{R}^n$  και  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , τότε  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n$ .

Έχει λυθεί στην τελευταία διάλεξη.

4. Έστω  $X = \mathcal{C}[0, 1]$  ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα  $[0, 1]$ . Ορίζουμε τον μετασχηματισμό  $I : X \rightarrow X$ , όπου  $I(f) = F$  με

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- (α) Δείξτε ότι ο  $I$  είναι γραμμικός μετασχηματισμός.  
 (β) Περιγράψτε την εικόνα image  $I$ , του  $I$ .  
 (γ) Δείξτε ότι ο  $I$  είναι ένα-προς-ένα. **Υπόδειξη:**  $I(f)(0) = 0$  για κάθε  $f \in X$ .  
 (δ) Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός  $I^{-1}$ .
5. Έστω  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με

$$T \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y \\ -5x + 13y \\ -7x + 16y \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί το μητρώο του  $T$  ως προς τις βάσεις

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{και} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

6. Έστω  $\mathbf{u} = (a \ b \ c)^T$  ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο  $\mathbb{R}^3$ . Επιβεβαιώστε ότι το μητρώο  $P = (I - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)$  είναι το μητρώο προβολής επί του επιπέδου με εξίσωση  $ax + by + cz = 0$ . Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  που ορίζεται ως  $T(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ .

(α) Να βρεθεί ο τύπος του  $T$ .

(β) Να βρεθεί η εικόνα  $\text{image } T$  του  $T$ .

(γ) Να βρεθεί ο πυρήνας  $\text{kernel } T$  του μετασχηματισμού.

7. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους των πολυωνύμων  $\mathbb{P}_2$  και  $\mathbb{P}_3$  και τον μετασχηματισμό ολοκλήρωμα  $J : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$  όπου για  $p \in \mathbb{P}_3$  είναι  $J(p) = P$  με

$$P(x) = \int_0^x p(t) dt.$$

(α) Να βρεθεί η εικόνα  $\text{image } J$  του  $J$ .

(β) Εξετάστε αν ο μετασχηματισμός ένα-προς-ένα.

(γ) Να βρεθεί το μητρώο που παριστάνει τον  $J$ .