ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 11η σειρά: Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση

Επισκόπηση

1. **Ιδιοτιμή/Ιδιοδιάνυσμα.** Έστω A ένα τετραγωνικό, $n \times n$, μητρώο. Εάν
$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$
η σταθερά λ λέγεται **ιδιοτιμή** του A και το $\mathbf{x}$ **το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα**.
   - Το **το χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A είναι το
   $$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$
   Ο βαθμός του p είναι n.
   - Ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι
   $$p(0) = (-1)^n \det A.$$
   - Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
   - Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $m \leq n$ είναι οι ιδιοτιμές του A, τότε
   $$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}, \qquad k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$
   Το k_j είναι η **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_j.
   - Αν λ είναι ιδιοτιμή του A ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα (στο λ) είναι ένα στοιχείο του μηδενόχωρου
   $$\operatorname{null}(\lambda I - A).$$
   - Η διάσταση του $\operatorname{null}(\lambda I - A)$, $\dim \operatorname{null}(\lambda I - A)$ ορίζεται ως **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ.

2. **Θεώρημα Cayley – Hamilton.** Αν $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε $p(A) = O$,
$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = O.$$

3. Τα τετραγωνικά μητρώα A και B λέγονται **όμοια** αν υπάρχει αντιστρέψιμο μητρώο M, ώστε $A = M^{-1}BM$.

4. Το A λέγεται **διαγωνοποιήσιμο** αν είναι όμοιο με κάποιο διαγώνιο μητρώο.

5. **Θεώρημα.** Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν το A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα το A είναι διαγωνοποιήσιμο.

6. **Θεώρημα.** Εάν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής λ είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα τότε το A ειναι διαγωνοποιήσιμο. Στην περίπτωση αυτή αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές όπου κάθε ιδιοτιμή επαναλαμβάνεται σύμφωνα με την πολλαπλότητά της, και $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ είναι τα αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε
$$A\big(\xi_1 \;\; \xi_2 \;\; \dots \;\; \xi_n\big) = \big(\lambda_1\xi_1 \;\; \lambda_2\xi_2 \;\; \dots \;\; \lambda_n\xi_n\big) = \big(\xi_1 \;\; \xi_2 \;\; \dots \;\; \xi_n\big)\big(\lambda_1\mathbf{e}_1 \;\; \lambda_2\mathbf{e}_2 \;\; \dots \;\; \lambda_n\mathbf{e}_n\big)$$
$$\Rightarrow A = X\Lambda X^{-1}, \qquad \text{όπου} \qquad X = \big(\xi_1 \;\; \xi_2 \;\; \dots \;\; \xi_n\big).$$

Ασκήσεις

1. Παραλλαγή της Άσκησης 22 §6.2 Strang. Δίνεται το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (α΄) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι του A.

   (β΄) Διαγωνοποιήστε το A.

   (γ΄) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

2. Εάν για το τετραγωνικό μητρώο ισχύει $A^2 = A$ και το διάνυσμα $\mathbf{u}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ, τί μπορεί να ειπωθεί για το λ;

3. Θεωρήστε το **μη αντιστρέψιμο** μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

   (α΄) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p_A του A, ακριβώς, προσδιορίζοντας δηλαδή, και αριθμητικά όπου εφαρμόζεται, όλους τους συντελεστές.

   (β΄) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A.

4. Άσκηση 15 §6.1 Strang. Κάθε μητρώο μετάθεσης P, ας πούμε 3×3, αφήνει το $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ αμετάβλητο, κατά συνέπεια το $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή. Να βρεθούν οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του μητρώου μετάθεσης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Άσκηση 16 §6.1 Strang. Αποδείξτε ότι η ορίζουσα μητρώου A ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του A.

6. Άσκηση 17 §6.1 Strang. Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων (το ίχνος) μητρώου ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών.

7. Να βρεθεί ένα ορθογώνιο μητρώο Q το οποίο διαγωνοποιεί το

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$