Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 8η σειρά (σχετικές με τη Διάλεξη 08)

Ανασκόπηση

- **Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν X είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και νόρμα που ορίζεται με τη σχέση $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ (**επαγόμενη νόρμα**), τότε

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

  για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του X. Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

- **Το Πυθαγόρειο Θεώρημα.** Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του X ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, δηλαδή $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = 0$, αν $i \neq j$, τότε

$$\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + \cdots \|\mathbf{u}_n\|^2.$$

- **Ο νόμος του παραλληλογράμμου.** Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Δείξτε ότι

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\big)$$

  για όλα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ στο X.

Ασκήσεις

1. Εάν $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$, και A είναι ένα αντιστρέψιμο 3×3 μητρώο δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = A\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v}$$

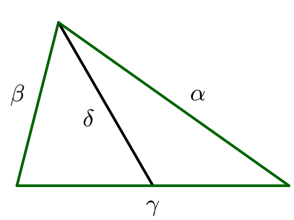
   ορίζει ένα εσωτρικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$. Σημειώνουμε ότι

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = A\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^{\mathrm{T}}A\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\mathbf{v}.$$

2. Αποδείξτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\mathbb{R}^3$.

3. Αποδείξτε το νόμο του παραλληλογράμμου.

4. Για το τρίγωνο του σχήματος χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο αποδείξτε το Θεώρημα του



   Απολλωνίου:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2} + 2\delta^2,$$

   όπου δ είναι το μήκος της διαμέσου.

5. Εάν σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ τα **μη μηδενικά** διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$, είναι ανά δύο ορθογώνια, δηλαδή $\langle\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = 0$ για $i \neq j$, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

6. Έστω ότι το $\mathbf{a}$ είναι ένα τυχαίο αλλά σταθερό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$.

   (α΄) Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1$.

   (β΄) Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_p \leq n^{1/p}\|\mathbf{a}\|_\infty$ για $p = 1, 2$.

7. Σε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$ δείξτε ότι για $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ ισχύει $\|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\| = \|b\mathbf{u} + a\mathbf{v}\|$ για όλα τα $a, b \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

8. Αν $\mathbf{q} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορίζουμε το μητρώο $Q = I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}$. Για το Q δείξτε ότι

   (α΄) Οι στήλες του αποτελούν μια ορθοκανονική βάση για το $\mathbb{R}^2$.

   (β΄) Ικανοποιεί τη σχέση $QQ^{\mathrm{T}} = I$ είναι δηλαδή ορθογώνιο.

   (γ΄) Ικανοποιεί τη σχέση $Q^2 = I$.

   (δ΄) Ανακλά κάθε διάνυσμα ως προς την ευθεία η οποία είναι ορθογώνια στο $\mathbf{q}$, δηλαδή κατά μήκος του $\mathbf{q}^\perp = \begin{pmatrix}-\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.