ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 5η σειρά, σχετικές με τη Διάλεξη 05

1. Να βρεθεί μια άνω-κάτω τριγωνική παραγοντοποίηση για το μητρώο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. Για ποιές τρεις τιμές της παραμέτρου λ είναι το μητρώο

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ 8 & 7 & \lambda \end{pmatrix}$$

μη αντιστρέψιμο; Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση γιατί συμβαίνει αυτό.
Υπόδειξη: Ένα μητρώο A είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν το A^{T} είναι αντιστρέψιμο, επιπλέον ισχύει ότι $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

3. Δείξτε ότι για $a \neq 0$ και $a \neq b$ το μητρώο

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμο και βρείτε το αντίστροφο.

4. Να βρεθούν όλες οι τιμές της παραμέτρου λ ώστε το μητρώο

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμο.

5. Έστω ότι τα A και B είναι τετραγωνικά μητρώα του ιδίου μεγέθους.

   (α΄) Αν C είναι επίσης τετραγωνικό μητρώο ώστε

$$A(B-C) = I,$$

   δείξτε ότι το A είναι αντιστρέψιμο και ότι $B = A^{-1} + C$.

   (β΄) Εάν το $D = AB$ είναι αντιστρέψιμο, δείξτε ότι και το A είναι αντιστρέψιμο.

6. Εάν $\mathbf{u}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα στο στο $\mathbb{R}^n$ με $n \geq 2$, η σχέση

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u}, \qquad -\infty < t < +\infty$$

είναι η εξίσωση της ευθείας L κατά μήκος του διανύσματος $\mathbf{u}$. Δείξτε ότι το L είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

7. Δείξτε ότι κάθε ένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικός υπόχωρος

(αʹ) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x + 2y + z = 0 \right\}$.

(βʹ) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x = y \quad \text{και} \quad 2y = z \right\}$.

(γʹ) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x + y = z \right\}$.

8. Εξετάστε εάν οι συναρτήσεις στο $\mathcal{C}[0,1]$ οι οποίες παίρνουν την τιμή 0 στα άκρα του διαστήματος $[0,1]$ με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με σταθερά, αποτελούν διανυσματικό χώρο.

9. Εξετάστε αν τα πολυώνυμα του $\mathbb{P}_n$ με μηδενικό σταθερό όρο αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο.

10. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος και V και W υπόχωροι του X.

    (αʹ) Δείξτε ότι το $V \cap W$ είναι υπόχωρος του X.

    (βʹ) Ορίζουμε το **άθροισμα**

$$V + W = \{v + w : v \in V \text{ και } w \in W\}.$$

    Δείξτε ότι το $V + W$ είναι υπόχωρος του X.

Λύση της 2

(*a*) Παρατηρούμε ότι αν $\lambda = 0$ το μητρώο έχει μια μηδενική γραμμή, αυτό σημαίνει ότι το μητρώο δεν μπορεί να είναι γραμμοϊσοδύναμο με το ταυτοτικό μητρώο. Πράγματι σε ένα βήμα της διαδικασίας της απαλοιφής (Gauss) βρίσκουμε

$$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Το τελευταίο μητρώο δεν περιέχει τρεις οδηγούς, άρα δεν αντιστρέφεται.

(*b*) Για $\lambda \neq 0$ με τη διαδικασία της απαλοιφής βρίσκουμε

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ 8 & 7 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 - \lambda/2 & 1 - \lambda/2 \\ 0 & 7 - 4\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$$

Για να αντιστρέφεται το $A(\lambda)$ θα πρέπει $1 - \lambda/2 \neq 0$ (να μη περιέχει μηδενική γραμμή), κατά συνέπεια θα πρέπει να είναι $\lambda \neq 2$, οπότε το επόμενο βήμα της διαδικασίας της απαλοιφής δίνει

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 - 4\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}.$$

Για να αντιστρέφεται το $A(\lambda)$ θα πρέπει η τελευταία γραμμή του τελευταίου μητρώου να περιέχει οδηγό, ισοδύναμα να μην είναι πολλαπλάσιο της δεύτερης γραμμής, θα πρέπει κατά συνέπεια να είναι

$$7 - 4\lambda \neq -3\lambda \Leftrightarrow \lambda \neq 7.$$

Έτσι για να είναι αντιστρέψιμο το μητρώο θα πρέπει να είναι $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq 7$.

Λύση της 4

Το μητρώο είναι άνω τριγωνικό οπότε για να είναι αντιστρέψιμο θα πρέπει οι τρεις οδηγοί να βρίσκονται στη διαγώνιο, κατά συνέπεια θα πρέπει να είναι

$$\lambda \neq 3 \qquad \text{και} \qquad \lambda \neq -2 \qquad \text{και} \qquad \lambda \neq 0.$$

Για όλες τις άλλες τιμές της παραμέτρου λ το αντίστοιχο μητρώο αντιστρέφεται.