ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 4η σειρά, σχετικές με τη Διάλεξη 04

1. Με τη μέθοδο της απαλοιφής να επιλυθεί καθένα από τα συστήματα βρίσκοντας την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του αντίστοιχου επαυξημένου μητρώου

   (α΄) $$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= -1 \\ 2x + y + z &= 3 \\ -x + 2y + z &= -4 \end{aligned}$$

   (β΄) $$\begin{aligned} 3x + y - z &= 3 \\ x + 3y + z &= 2 \\ 5x - y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

2. Δίνονται τα σημεία $P(1,2)$, $Q(-1,6)$, και $R(2,3)$ στο επίπεδο.

   (α΄) Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x) = ax^2 + bx + c$ του οποίου το γράφημα περιέχει τα σημεία P, Q, και R.

   (β΄) Υπάρχουν πολυώνυμα $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ των οποίων το γράφημα περιέχει τα σημεία P, Q, και R;

3. Για το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ 2x + 3y + 3z &= b \\ x + 2y + \mu z &= c \end{aligned}$$

   όπου a, b, c, μ είναι πραγματικές παράμετροι, βρείτε σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων ώστε το σύστημα να έχει (i) μοναδική λύση, (ii) άπειρες λύσεις, ή (iii) καμία λύση (**αδύνατο**).

4. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= a \\ 2x - 2y + 3z &= 2 \\ x + 2y + a^2 z &= b \end{aligned}$$

   όπου a και b είναι πραγματικές παράμετροι. Βρείτε συνθήκες για τις παραμέτρους ώστε το σύστημα να έχει (i) καμία λύση, (ii) μία μόνο λύση, ή (iii) άπειρες λύσεις.

5. ♠ ♣ Κάνοντας χρήση των στοιχειωδών μητρώων να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Λύση της 5

$$E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$$E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_5E_4E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση 1. Αν $B = E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$, τότε $BA = I$. Μπορεί να δειχθεί ότι $AB = I$, κατά συνέπεια το B είναι το αντίστροφο του A. Πράγματι

$$E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1E_2 = E_2E_1$$

$$E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_5E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_6E_5E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

και

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$