

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 12

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

18 Δεκεμβρίου 2025

Ορισμός 1

Έστω τετραγωνικό μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε κάθε αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ για τον οποίο το γραμμικό σύστημα $(A - \lambda I)x = 0$ έχει μη μηδενική λύση, $x \in \mathbb{C}^n$, δηλ.

$$\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \text{ τ.ώ. } (A - \lambda I)x = 0,$$

ονομάζεται **ιδιοτιμή** του A και το αντίστοιχο x **ιδιοδιάνυσμα του A** (για την ιδιοτιμή λ). Αντίστοιχα, αν για κάποιο διάνυσμα $x \neq 0$, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ τ.ώ. $Ax = \lambda x$, το x ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα και το λ ιδιοτιμή του A για το x . Τα ζεύγη (λ, x) λέγονται **ιδιοζεύγη**.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός μητρώου αναδεικνύουν σημαντικές ιδιότητες γι' αυτό και τους υποχώρους που συνδέονται με αυτό και χρησιμοποιούνται πολύ στις εφαρμογές.

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν πολλαπλασιάσουμε το μητρώο με το ιδιοδιάνυσμά του ή συγγραμμικά του, το παραγόμενο διάνυσμα παραμένει συγγραμμικό: Τα ιδιοδιανύσματα ορίζουν κατευθύνσεις που παραμενουν **αναλλοίωτες** από τον πολλαπλασιασμό με το μητρώο.

Επιπλέον, στην περίπτωση των πραγματικών ιδιοτιμών:

- Αν $\lambda > 1$, $\|Ax\| > \|x\|$, δηλ. το διάνυσμα υφίσταται επιμήκυνση (stretching), δηλ. κλιμάκωση κατά παράγονται λ .
- Αν $\lambda < 1$, $\|Ax\| < \|x\|$, δηλ. το διάνυσμα υφίσταται σμίκρυνση (shrinking), δηλ. κλιμάκωση κατά παράγονται λ .
- Αν $\lambda < 0$ το διάνυσμα υφίσταται ανάκλαση και κλιμάκωση (reflection + scaling)

Στη συνέχεια, τουλάχιστον για την απλή περίπτωση $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

- θα δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία του μετασχηματισμού,
- και θα εξηγήσουμε γιατί υπάρχουν ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα III

Προσοχή:

- Για κάθε μητρώο ισχύει ότι αν $z = 0$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε $Az = A0 = 0$. Παρόλα αυτά, το μηδενικό διάνυσμα ΔΕΝ λαμβάνεται υπόψη ως ιδιοδιάνυσμα. Αντίθετα, μπορεί να ισχύει ότι $Ax = 0 = 0 \cdot x$ για $x \neq 0$, οπότε το x θα είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0$.
- Αν $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$, τότε για κάθε $\gamma \neq 0$ ισχύει ότι $A(\gamma x_\lambda) = \lambda(\gamma x_\lambda)$. Επομένως, κάθε μη μηδενικό πολλαπλάσιο ενός ιδιοδιανύσματος είναι και αυτό ιδιοδιάνυσμα για τη συγκεκριμένη ιδιοτιμή.

Προσοχή

- Άρα το μηδενικό διάνυσμα ΔΕΝ θεωρείται ιδιοδιάνυσμα αλλά το μηδέν ΜΠΟΡΕΙ να είναι ιδιοτιμή.
- Συνήθως, όταν αναφερόμαστε σε ιδιοδιανύσματα, θα θεωρούμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ότι τα έχουμε κανονικοποιήσει, π.χ. να είναι μοναδιαία.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα IV

Παράδειγμα 1

Έστω ότι $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Τότε αν $x = e_1$, $Ae_1 = e_1$ και $Ae_2 = -e_2$. Επομένως διακρίνουμε δύο ιδιοζεύγη, $(1, e_1)$, $(-1, e_2)$.

Παράδειγμα 2

Έστω ότι $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Τότε προφανώς ισχύει ότι $Ae_1 = e_1$. Επίσης, αν το μοναδιαίο διάνυσμα $q = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, -1]^T$, τότε μπορείτε να επαληθεύσετε ότι $Aq = -q$. Επομένως εντοπίσαμε τα δύο ιδιοζεύγη, $(1, e_1)$, $(-1, q)$.

Παράδειγμα 3

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1.05 & 0.95 \\ 0.95 & 1.05 \end{pmatrix}$. Τότε αν δοκιμάσουμε τα διανύσματα $q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}[-1, 1]^T$, $q = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, 1]^T$ θα δούμε ότι $Aq_1 = 2q_1$ και $Aq_2 = 0.1q_2$. Επομένως εντοπίσαμε 2 ιδιοζεύγη $(2, q_1)$, $(0.1, q_2)$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα V

Παράδειγμα 4

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Τότε, $Aq = q$ όπου $q = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, 1]^T$. Επίσης $Ap = 0$ αν $p = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, -1]^T$. Επομένως, εντοπίσαμε δύο ιδιοζεύγη $(1, q)$ και $(0, p)$.

Παρατήρηση 1

Αν A όπως παραπάνω και $x = q + 1000p$ τότε $Ax = Aq + 1000Ap = q$ καθώς $Ap = 0$. Δηλαδή, το A διαγράφει ό,τι βρίσκεται συγγραμμικά στο q . Κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των p, q επομένως αν $x = \gamma_1 p + \gamma_2 q$ τότε $Ax = \gamma_2 q$.

Παράδειγμα 5

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε τα ιδιοζεύγη είναι τα εξής: $Aq_1 = \lambda_1 q_1$ όπου $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$ και $q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Επίσης $Aq_2 = \lambda_2 q_2$ όπου $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.6180$ και $q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα VI

Παρατήρηση 2

Αν A όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, όπως και πριν, αν $x = \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2$ τότε

$$Ax = \gamma_1 Aq_1 + \gamma_2 Aq_2 = \gamma_1 \lambda_1 q_1 + \gamma_2 \lambda_2 q_2$$

και γενικότερα

$$A^k x = \gamma_1 \lambda_1^k q_1 + \gamma_2 \lambda_2^k q_2$$

Επίσης προσέξτε ότι $|\lambda_2| < 1$ ενώ $|\lambda_1| > 1$ και μάλιστα είναι ο **χρυσός λόγος (golden ratio)**. Μπορείτε να επαληθεύσετε ή καλύτερα, με λίγη προσοχή, να βρείτε ότι αν $x = [1, 0]^T = e_1$ τότε $\gamma_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\gamma_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Επομένως για μεγάλες τιμές του k και $x = e_1$, ο όρος $\lambda_2^k \rightarrow 0$ και επομένως μπορούμε να προσεγγίσουμε το

$$A^k e_1 \approx \frac{\sqrt{5}}{5} \lambda_1^k q_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η παραπάνω σχέση για το $A^k e_1$ δείχνει ότι η πρώτη προς τη δεύτερη συνιστώσα του διανύσματος είναι ίση με τον χρυσό λόγο (golden ratio). Προσέξτε ότι οι 2 όροι του διανύσματος $A^k e_1$ αποτελούν προσεγγίσεις για τους όρους ϕ_{k+1} , ϕ_k της ακολουθίας Fibonacci. Ενδιαφέρον!

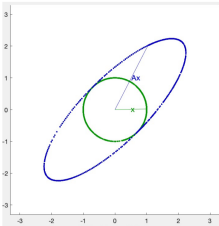
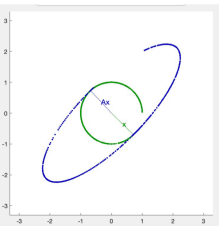
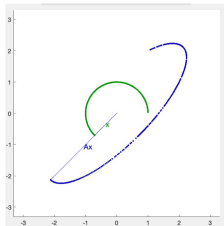
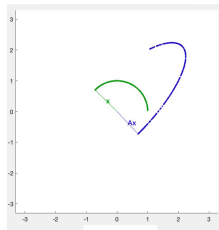
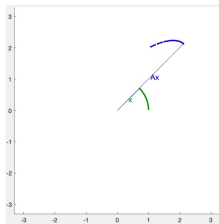
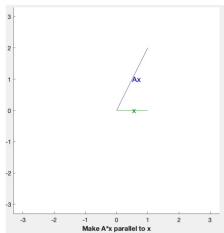
Γεωμετρική ερμηνεία και οπτικοποίηση

Χρησιμοποιούμε το περιβάλλον MATLAB και τη συνάρτηση-demo eigshow του Cleve Moler .

```
cd /Users/EG_home/Dropbox/MATLAB/CleveLaboratory/Cleve_Lab
% motivational experiments with eigshowA
= (1 2; 2 1); eigshow(A);A
= (3 -2;1 0); eigshow(A);
^^|
```

- Για δοθέν μητρώο A (π.χ. ένα από τα παραπάνω), η συνάρτηση eigshow¹ δίνει τη δυνατότητα να παρακολουθούμε για κάθε σημείο (πράσινο) στο μοναδιαίο κύκλο, δηλ για κάθε σημείο που αντιστοιχεί σε μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^2$ $\|x\|_2 = 1$, το σημείο (μπλε) που αντιστοιχεί στο γινόμενο Ax . Οι τιμές αποτυπώνονται στο σχήμα (βλ. επόμενες διαφάνειες).
- Βάσει του eigshow μπορούμε να διερευνήσουμε για οποιοδήποτε $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, τότε ισχύει ότι $Ax = \lambda x$ για πραγματικό βαθμωτό λ και μοναδιαίο x .
- Προσοχή: αυτή η γεωμετρική παρουσίαση είναι για εκπαιδευτικούς λόγους και δεν συνιστά πρακτικό τρόπο εύρεσης ιδιοτιμών.

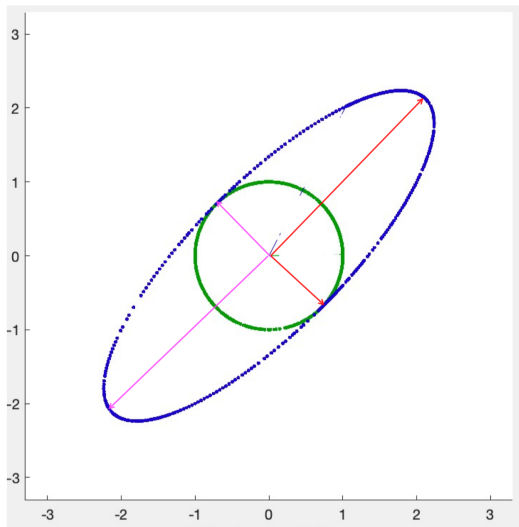
¹Του Cleve Moler για το περιβάλλον MATLAB

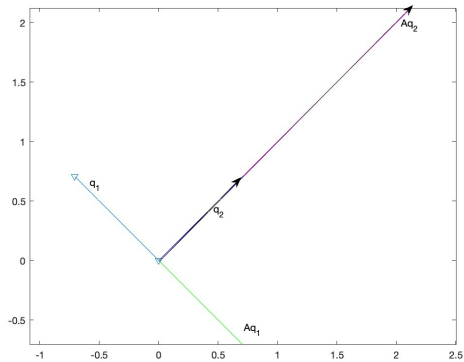


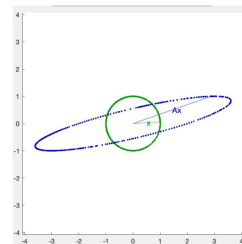
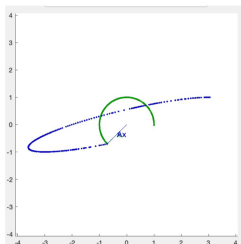
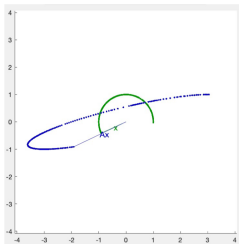
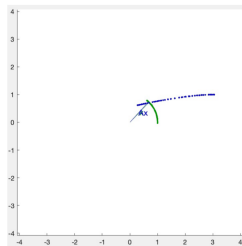
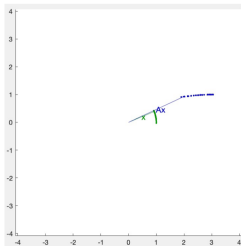
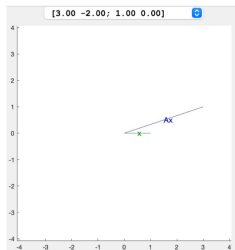
Οι ιδιότητες του $\{Ax|x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}$ (στην περίπτωση είναι μία έλλειψη με άξονες μήκους 3 και 1) εξηγούνται βάσει αυτών που θα μάθουμε στο παρόν κεφάλαιο. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ιδιοτιμές $\Lambda(A) = \{-1, 3\}$, ιδιοδιανύσματα $q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Λεπτομερέστερη αποτύπωση των διανυσμάτων για τα οποία $Aq = \lambda q$. Προσέξτε ότι:

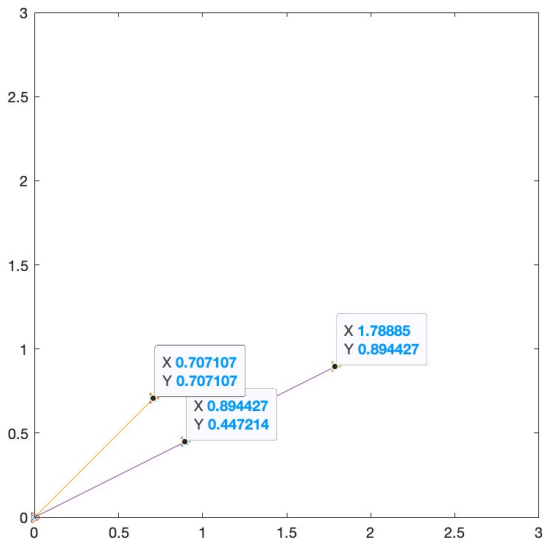
- 1 $A = A^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, δηλ. το μητρώο είναι πραγματικό και συμμετρικό.
- 2 Υπάρχουν δύο τιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ και δύο αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα q_1, q_2 για τα οποία ισχύει ότι $Aq_j = \lambda_j q_j$. Προφανώς, ισχύουν επίσης $A(-q_j) = \lambda_j(-q_j)$ αλλά και $A(\gamma q_j) = \lambda_j(\gamma q_j)$ για οποιοδήποτε βαθμωτό γ .
- 3 Επομένως $Aq_1 = -q_1$, $Aq_2 = 3q_2$ και $A(-q_1) = -(-q_1) = q_1$, $A(-q_2) = -3q_2$. Οι τιμές $\{-1, 3\}$ προσδιορίζουν την κλιμάκωση ή/και αλλαγή φοράς στην οποία υπόκεινται τα διανύσματα $\pm q_1, \pm q_2$ όταν πολλαπλασιαστούν με το A .
- 4 Τα διανύσματα $\pm Aq_1, \pm Aq_2$ συμπίπτουν με τον ελάχιστο και μέγιστο ημιάξονα της έλλειψης.
- 5 $q_1^T q_2 = q_2^T q_1 = 0$, δηλ. τα q_1, q_2 είναι μεταξύ τους ορθογώνια,







Οι ιδιότητες του $\{Ax | x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}$ (στην περίπτωση είναι μία έλλειψη) εξηγούνται βάσει αυτών που θα μάθουμε στο παρόν κεφάλαιο. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ιδιοτιμές $\Lambda(A) = \{2, 1\}$, ιδιοδιανύσματα $q_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{4} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Λεπτομερέστερη αποτύπωση των διανυσμάτων για τα οποία $Aq = \lambda q$. Προσέξτε ότι:

- 1 $A \neq A^T$, δηλ. το μητρώο δεν είναι συμμετρικό.
- 2 Υπάρχουν δύο τιμές $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ και δύο αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα q_1, q_2 για τα οποία ισχύει ότι $Aq_j = \lambda_j q_j$. Προφανώς, ισχύουν επίσης $A(-q_j) = \lambda_j(-q_j)$ αλλά και $A(\gamma q_j) = \lambda_j(\gamma q_j)$ για οποιοδήποτε βαθμωτό γ .
- 3 Επομένως $Aq_1 = 2q_1, Aq_2 = q_2$ και $A(-q_1) = 2(-q_1), A(-q_2) = -q_2$. Οι τιμές $\{2, 1\}$ προσδιορίζουν την κλιμάκωση ή/και αλλαγή φοράς στην οποία υπόκεινται τα διανύσματα $\pm q_1, \pm q_2$ όταν πολλαπλασιαστούν με το A .
- 4 Τα διανύσματα $\pm Aq_1, \pm Aq_2$ δεν συμπίπτουν με τον ελάχιστο και μέγιστο ημιάξονα της έλλειψης.
- 5 $q_1^T q_2 = q_2^T q_1 \neq 0$, δηλ. τα q_1, q_2 δεν είναι μεταξύ τους ορθογώνια,

Αιτιολόγηση ύπαρξης ιδιοζευγών I

Για την αιτιολόγηση ύπαρξης, θα περιοριστούμε στην περίπτωση μητρώων διάστασης 2×2 .

Έστω $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Για ένα αυθαίρετο $y \in \mathbb{C}^2$, υπολογίζουμε τα διανύσματα y, Ay, A^2y . Αν τα y, Ay είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $Ay = \lambda y$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$. Αν τα y, Ay είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα y, Ay, A^2y είναι οπωσδήποτε γραμμικά εξαρτημένα καθώς ανήκουν στον $\mathbb{C}^2$.

Επομένως, αν γράψουμε $Bz = w$ όπου $B = [y, Ay]$ και $w = A^2y$, το γραμμικό σύστημα $Bz = w$ έχει μοναδική λύση. Δηλαδή $[y, Ay]z = A^2y$. Αν $z = [\zeta_1, \zeta_2]^T$, τότε

$$\zeta_1 y + \zeta_2 Ay = A^2y \Rightarrow A^2y - \zeta_2 Ay - \zeta_1 y = 0$$

Από το παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε το 2βάθμιο πολυώνυμο $p(r) = r^2 - \zeta_2 r - \zeta_1$ που έχει ακριβώς 2 ρίζες (ενδεχομένως ίσες) $\rho_1, \rho_2 \in \text{mathbb{C}}$. Επομένως θα ισχύει ότι

$$(A^2 - \zeta_2 A - \zeta_1 I)y = 0 \Rightarrow (A - \rho_1 I)(A - \rho_2 I)y = 0$$

Επομένως ισχύει ότι τουλάχιστον ένας ή και οι δύο όροι $(A - \rho_1 I), (A - \rho_2 I)$ θα είναι μη αντιστρέψιμοι/οι. Γράφουμε τον όρο ως $(A - \rho I)$.

Ισχύει ότι $\text{null}(A - \rho I) \neq \{0\}$ και ότι $\det(A - \rho I) = 0$. Επομένως για κάθε (μη μηδενικό) $x \in \text{null}(A - \rho I)$, $(A - \rho I)x = 0$. Επομένως για τα συγκεκριμένα ρ, x ισχύει ότι $Ax = \rho x$.

- Το ρ είναι ιδιοτιμή του A και το x ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή ρ .

Απολόγηση ύπαρξης ιδιοζευγών II

Αποδείξαμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ύπαρξη και δεύτερης ιδιοτιμής για το $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε ένα επιπλέον διάνυσμα y που είναι γραμμικά ανεξάρτητο του x ώστε τα $\{x, y\}$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^2$. Επομένως αν $X = [x, y]$ τότε $AX = [\rho x, Ay]$. Επειδή τα x, y γραμμικά ανεξάρτητα, θα είναι βάση για τον $\mathbb{R}^2$ επομένως μπορούμε να γράψουμε το $Ay = \gamma_1 x + \gamma_2 y$ για κάποια γ_1, γ_2 . Επομένως

$$AX = [\rho x, Ay] = [\rho x, \gamma_1 x + \gamma_2 y] = [x, y] \begin{bmatrix} \rho & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

άρα $AX = XT$ όπου T είναι το παραπάνω άνω τριγωνικό μητρώο. Το X είναι επίσης αντιστρέψιμο, άρα $=^{-1}$. Κατά συνέπεια, $A - \gamma_2 I = XTX^{-1} - \gamma_2 XX^{-1}$ και επομένως $A - \gamma_2 I = X(T - \gamma_2 I)X^{-1}$. Προσέξτε όμως ότι

$$T - \gamma_2 I = \begin{bmatrix} \rho - \gamma_2 & \gamma_1 \\ 0 & \underbrace{\gamma_2 - \gamma_2}_{0} \end{bmatrix}$$

Επομένως το $T - \gamma_2 I$ δεν είναι αντιστρέψιμο το ίδιο και το $A - \gamma_2 I$, άρα το γ_2 είναι ιδιοτιμή του A . Άρα αποδείξαμε ότι το $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ έχει 2 ιδιοτιμές.

Ερωτήματα για ένα γενικό μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- Πόσες ιδιοτιμές έχει;
- Πόσα ιδιοδιανύσματα έχει; (ή καλύτερα, ποιές είναι οι διαστάσεις των αντίστοιχων μηδενόχωρων;)
- Πώς υπολογίζονται τα ιδοζεύγη;
- Γιατί είναι σημαντικά και μας ενδιαφέρουν;

Το $\lambda = 0$ ΜΠΟΡΕΙ να είναι ιδιοτιμή. Το μηδενικό διάνυσμα, αν και ικανοποιεί $Ax = \lambda x = 0$ ΔΕΝ θεωρείται ιδιοδιάνυσμα.

The \$25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google*

Kurt Bryan[†]
Tanya Leise[‡]

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of web pages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and *Mathematica* files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/~bryan.

Key words. linear algebra, PageRank, eigenvector, stochastic matrix

Τι λέει και τι γράφει ο κόσμος για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα;



eigenvalues



All



Images



Videos



News



Books



More

Tools

About 64,200,000 results (1.71 seconds)

Eigenvalues are **a special set of scalars associated with a linear system of equations** (i.e., a matrix equation) that are sometimes also known as characteristic roots, characteristic values (Hoffman and Kunze 1971), proper values, or latent roots (Marcus and Minc 1988, p. 144).

<https://mathworld.wolfram.com> › Eigenvalue

[Eigenvalue -- from Wolfram MathWorld](#)

Ενδεικτικές εφαρμογές

Δείτε τα ενδιαφέροντα βίντεο του Zachary Todd (ZachStar) καθώς και μία διάσημη καταστροφή που σχετίζεται με τα ιδιοζεύγη.

- Εφαρμογές ιδιοζευγών
- Γενικές εφαρμογές μητρώων
- κατάρρευση της γέφυρας Takoma στην πολιτεία Washington των ΗΠΑ.

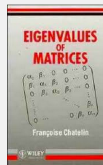
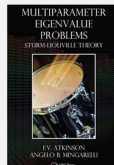
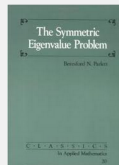
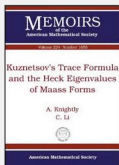
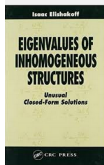
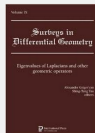
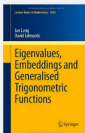
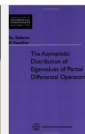
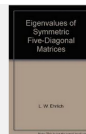
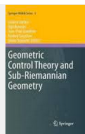
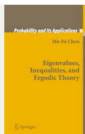
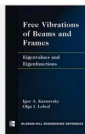
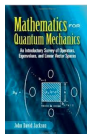
Παρατήρηση 3

Σχετικά με το Παράδειγμα 5: Αν $\mathbf{f}^{(n)} = [\phi_n, \phi_{n-1}]^T$ τότε

$$A\mathbf{f}^{(n)} = \begin{pmatrix} \phi_n + \phi_{n-1} \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

Ίσως αναγνωρίζετε την αναδρομική σχέση της ακολουθίας Fibonacci! Δηλ. αν το διάνυσμα $\mathbf{f}^{(n)}$ περιέχει τους 2 πιο πρόσφατους όρους της ακολουθίας για $n = 0, 1, \dots$ εκκινώντας από το $\mathbf{f}^{(0)} = [1, 0]^T$, τότε $\mathbf{f}^{(n+1)} = A\mathbf{f}^{(n)}$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = A\mathbf{f}^{(n)} = A^2\mathbf{f}^{(n-1)} = \dots = A^{n+1}\mathbf{f}^{(0)}.$$



Παράδειγμα

Από το $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ κατασκευάζουμε το παραμετροποιημένο

$$A(\lambda) = \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες εκείνες οι τιμές λ (ενδεχομένως μιγαδικές) για τις οποίες το $A(\lambda)$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Στην περίπτωση μας, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι τα $A(1)$, $A(2)$ δεν είναι αντιστρέψιμα. Επομένως υπάρχουν διανύσματα u_1 , u_2 τέτοια ώστε:

$$A(1)u_1 = 0, A(2)u_2 = 0$$

Λύνοντας τα αντίστοιχα ομογενή συστήματα προκύπτει ότι οι (ειδικές) λύσεις τους είναι οι $u_1 = (1, 1)^T$ και $u_2 = (2, 1)^T$. Άρα ισχύει ότι $\text{null}(A(1)) = \text{span}\{u_1\}$ και $\text{null}(A(2)) = \text{span}\{u_2\}$. Επομένως, ως ιδιοδιάνυσμα του για την ιδιοτιμή 1 μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του $\text{null}(A(1))$. Συνήθως, επιλέγουμε διανύσματα που έχουν κανονικοποιηθεί με κάποιον τρόπο, π.χ. τέτοια ώστε $\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = 1$. Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, 1]^T, u_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}[2, 1]^T$$

Προσοχή: Δεν εξηγήσαμε γιατί επιλέξαμε τα $A(1)$, $A(2)$. Ούτε το ότι για το δεδομένο A , αυτά είναι τα μοναδικά δύο μη αντιστρέψιμα μητρώα $\lambda I - A$. Ο σχεδιασμός συστηματικών μεθόδων αναζήτησης και υπολογισμού τους είναι ένα από τα βασικά ζητούμενα του όχι μόνον αυτού του κεφαλαίου, αλλά και πολλών βιβλίων και της σημερινής έρευνας.

Παράδειγμα

Από το $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$ κατασκευάζουμε το παραμετροποιημένο

$$A(\lambda) = \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 12 & \lambda - 7 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες εκείνες οι τιμές λ (ενδεχομένως μιγαδικές) για τις οποίες το $A(\lambda)$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Στην περίπτωση μας, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι τα $A(1)$, $A(3)$ δεν είναι αντιστρέψιμα. Λύνοντας τα ομογενή συστήματα

$$A(1)u_1 = 0, A(3)u_2 = 0$$

προκύπτει ότι (ειδικές) λύσεις τους είναι οι $u_1 = (1, 2)^T$ και $u_2 = (1, 3)^T$. Προφανώς ισχύει ότι $\text{null}(A(1)) = \text{span}\{u_1\}$ και $\text{null}(A(3)) = \text{span}\{u_2\}$. Επομένως, ως ιδιοδιάνυσμα του για την ιδιοτιμή 1 μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του $\text{null}(A(1))$. Συνήθως, επιλέγουμε διανύσματα που έχουν κανονικοποιηθεί με κάποιον τρόπο, π.χ. τέτοια ώστε $\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = 1$.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές

Ένα ειδικό πολυώνυμο για κάθε μητρώο

Εξετάζουμε το $\det(\lambda I - A)$ όπου λ είναι μία μεταβλητή:

- Αν

$$\begin{aligned}\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \lambda - \alpha_{22} \end{pmatrix} \\ \det(\lambda I - A) &= (-\alpha_{11} + \lambda)(-\alpha_{22} + \lambda) - \alpha_{21}\alpha_{12} \\ &= \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}\end{aligned}$$

- Το $\det(A - \lambda I)$ είναι **πολυώνυμο 2ου βαθμού** ως προς λ .
- Προσέξτε τους συντελεστές των 2 μεγαλύτερων δυνάμεων λ^2 , λ και τη σταθερά:

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= 1, \\ \gamma_1 &= -(\alpha_{11} + \alpha_{22}) \\ \gamma_0 &= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}\end{aligned}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ονομάζεται το πολυώνυμο βαθμού n με το οποίο ισούται η ορίζουσα

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$\hat{p}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n p(\lambda).$$

- Αν γράψουμε το πολυώνυμο σε δυναμομορφή, τότε

$$p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1 \lambda + \gamma_0$$

Προσέξτε ότι ο βαθμός του πολυωνύμου είναι ακριβώς n (γιατί;)

$$\gamma_{n-1} = -\text{trace}(A), \quad \gamma_0 = (-1)^n \det(A)$$

- Οι ρίζες του χ.π. ονομάζονται **ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ** (του μητρώου).
- Το πολυώνυμο έχει ακριβώς n ρίζες και άρα n ιδιοτιμές. Μερικές ή όλες μπορεί να είναι ίσες (πολλαπλές). Το σύνολο των ιδιοτιμών λέγεται το **φάσμα (spectrum)** του.
- Γράφουμε $p(x) = (x - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (x - \lambda_k)^{\mu_k}$ όπου $k \leq n$ είναι το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών, $1 \leq \mu_j \leq k$ είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_j και $\sum_{j=1}^k \mu_k = n$. Το μ_j λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_j .

Μία ιδέα επίλυσης του ΑΠΙ (ΜΟΝΟΝ ΓΙΑ ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΔΗΛ. ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΑΓΚΕΣ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ!)

- 1 Εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. **Δαπανηρή και αριθμητικά προβληματική για μεγάλα προβλήματα.**
- 2 Υπολογισμός των ριζών του (που είναι οι ιδιοτιμές). **Αν $n \geq 5$ τότε δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος υπολογισμού των ριζών και πρέπει να χρησιμοποιηθεί (επαναληπτικός) αλγόριθμος προσέγγισης ριζών πολυωνύμου².**
- 3 Για κάθε ιδιοτιμή, επίλυση του $(A - \lambda I)x = 0$ και επιλογή των ιδιοδιανυσμάτων (ανεύρεση των ειδικών λύσεων). **Αλγόριθμος εύρεσης μηδενοχώρου. Η TETPIMMENH ΛΥΣΗ $x = 0$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ**

Για κάθε ιδιοτιμή λ_j , συνήθως ενδιαφέρει ένα σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που είναι βάση για το $\text{null}(\lambda_j I - A)$. Αυτά είναι ειδικές λύσεις του $(\lambda I - A)x = 0$. Συνήθως τα διανύσματα επιλέγονται κανονικοποιημένα.

Τα παραπάνω είναι μόνο για μικρά προβλήματα και δεν χρησιμοποιείται: Στην πράξη (π.χ. στη MATLAB) χρησιμοποιούνται ειδικοί αλγόριθμοι (συνάρτηση eig) για την εύρεση των ιδιοτιμών (πχ. αλγόριθμος QR. **Μάλιστα, το x.π. υπολογίζεται μετά από κλήση στην eig για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και με υπολογισμό των συντελεστών της δυναμομορφής από την παραγοντοποιημένη μορφή.** Δηλαδή, η διαδικασία που ακολουθείται έχει την αντίθετη φορά από αυτήν που χρησιμοποιούμε εδώ³.

²Η αδυναμία αυτή αποτελεί ένα βασικό εύρημα των Μαθηματικών του 19ου αιώνα (Abel, Ruffini, και Galois)

³Η αριθμητική επίλυση του ΑΠΙ είναι ένα σημαντικό επιστημονικό αντικείμενο των περιοχών της Υπολογιστικής Γραμμικής Άλγεβρας και της Αριθμητικής Ανάλυσης.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3), \Lambda(A) = \{1, 3\}, \\ \lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2i & 0 & -2i \\ 2i & 4 & -2i & 0 \\ 0 & -2i & 4 & 2i \\ -2i & 0 & 2i & 4 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 4 - 4i)(\lambda - 4 + 4i), \\ \Lambda(A) = \{2, 4 + 4i, 4 - 4i\}, \lambda_1 = 4, \mu_1 = 2, \\ \lambda_2 = 4 + 4i, \mu_2 = 4 - 4i.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2, \Lambda(A) = \{1\}, \\ \lambda_1 = 1, \mu_1 = 2.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2, \\ \Lambda(A) = \{1, 2\}, \lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \\ \lambda_2 = 2, \mu_2 = 2.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 16\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 4)^2$$

επομένως

$$\lambda_1 = 0, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 4, \mu_2 = 2.$$

και

$$\Lambda(A) = \{0, 4\}$$

Ιδιοδιανύσματα I

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε ιδιοδιανύσματα για τις ιδιοτιμές μητρώου. Πρώτα εισάγουμε έναν ορισμό:

Ορισμός 2

Στο εξής, με τον όρο **μητρώο μηδενόχωρου** θα εννοούμε το μητρώο εκείνο του οποίου οι στήλες συνιστούν μια βάση του μηδενόχωρου.

Έστω το μητρώο $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, Βρήκαμε ότι $\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 1$.

Θέτουμε $A(1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(1)x = 0$:

Παρατηρούμε ότι η τάξη του $A(1)$ είναι $\deg(A(1)) = 1$. Μία βάση για το μηδενόχωρο του $A(1)$ (εδικές λύσεις του ομογενούς συστήματος για το $A(1)$) είναι $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα για το λ_1 : $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Θέτουμε $A(3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(3)x = 0$: Η τάξη $\deg(A(3)) = 1$. Μία βάση για το μηδενόχωρο του $A(3)$ είναι $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα για το λ_2 : $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Παρατηρήσεις I

Θα ισχύει ότι $A(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Προσέξτε ότι αν $X = (x_1, x_2)$ και $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, τότε

$$AX = X\Lambda$$

Το X είναι **αντιστρέψιμο** γιατί οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές (βλ. παρακάτω). Είναι επίσης **ορθογώνιο** (λόγω συμμετρίας του A , θα το δούμε και αυτό αργότερα).

Παρατηρήσεις II

Ισχύει επομένως ότι

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή

$$X^{-1}AX = X^TAX = \Lambda.$$

Προσοχή

Ο μετασχηματισμός $A \rightarrow X^{-1}AX$ λέγεται **μετασχηματισμός ομοιότητας** του A με το X . Όταν το X είναι ορθογώνιο, όπως εδώ, χαρακτηρίζεται ως **ορθογώνιος μετασχηματισμός ομοιότητας**. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, η εφαρμογή του μετασχηματισμού, **μετατρέπει το A σε διαγώνιο μητρώο, που περιέχει τις ιδιοτιμές**. Τότε λέμε ότι το μητρώο είναι **διαγωνιοποιήσιμο** (δείτε παρακάτω).

Ιδιοδιανύσματα I

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Είχαμε βρει ότι } \lambda_1 = 0, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 2, \mu_2 = 2. \text{ Για να}$$

βρούμε ιδιοδιανύσματα:

Θέτουμε $A(0) = -A$ και επιλύουμε $-Ax = 0$:

Η τάξη $\deg(A(0)) = 2$. Μία βάση για το μηδενόχωρο του $A(0)$ είναι $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιανύσματα για το $\lambda_1 = 0$: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Θέτουμε $A(4) = 4I - A$ και επιλύουμε $(4I - A)x = 0$:

Ιδιοδιανύσματα II

Η τάξη $\deg(A(4)) = 2$. Μία βάση για το μηδενόχωρο του $A(4)$ είναι $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιανύσματα για το $\lambda_2 = 4$: $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{x}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για το $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, βρήκαμε ότι $\Lambda(A) = \{1\}$, $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 2$.

Θέτουμε $A(1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(1)\mathbf{x} = 0$:

Η τάξη $\deg(A(1)) = 1$, επομένως η διάσταση του $\text{null}(A(1)) = 1$. Παρατηρούμε ότι $\text{null}(A(1)) < \mu_1$.

Μία βάση για το μηδενόχωρο του $A(1)$ είναι $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Κανονικοποιούμε, οπότε το ιδιοδιάνυσμα για το λ_1 είναι $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Προσοχή: Όλα τα ιδιοδιανύσματα του A για το $\lambda_1 = 1$ είναι πολλαπλάσια του x_1 . Δεν υπάρχουν άλλα! Εφόσον η μόνη ιδιοτιμή είναι το $\lambda_1 = 1$, αυτό είναι το μοναδικό ιδιοδιάνυσμα του A .

Σημαντική ιδιότητα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Η παρατήρηση του Cayley

Είδαμε ότι στην περίπτωση $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

Αντικαθιστούμε το λ με το :

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})A + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})I \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{22} \\ \alpha_{21}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{21} & \alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{22}^2 \end{pmatrix} - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) & 0 \\ 0 & (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Φαίνεται ότι $p(A) = 0$. Αυτό ισχύει για **οποιοδήποτε** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Έστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Τότε

$$p(A) = 0_{n \times n}.$$

A Memoir on the Theory of Matrices

Author(s): Arthur Cayley

Source: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 148 (1858), pp. 17-37

Published by: The Royal Society

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/108649>

Accessed: 03/05/2010 17:45

II. *A Memoir on the Theory of Matrices.* By ARTHUR CAYLEY, Esq., F.R.S.

Received December 10, 1857,—Read January 14, 1858.

THE term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, *e. g.*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

is said to be a matrix. The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$X = ax + by + cz,$$

$$Y = a'x + b'y + c'z,$$

$$Z = a''x + b''y + c''z,$$

may be more simply represented by

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z),$$



Η $\det$ είναι συνάρτηση **όλων των στοιχείων** του μητρώου, π.χ. για $n = 2$, όλων των

$$\alpha_{11} - \lambda, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} - \lambda$$

Επομένως ΔΕΝ μπορούμε να πούμε ότι $p(A) = \det(A - \lambda I)\det(0) = 0$.

Απόδειξη Cayley-Hamilton Αργότερα ..

Ένα άλλο θέμα: Έστω ότι $Ax = \lambda x$. Τότε $A(\gamma x) = \lambda(\gamma x)$, δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε το ιδιοδιάνυσμα με βαθμωτό, έχουμε πάλι ιδιοδιάνυσμα και η ιδιοτιμή παραμένει αμετάβλητη.

Αν όμως γράψουμε $(\gamma A)x = (\gamma \lambda)x$ δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε το μητρώο με βαθμωτό, το ιδιοδιάνυσμα παραμένει αμετάβλητο και η ιδιοτιμή πολλαπλασιάζεται με το βαθμωτό.

Μια (ακόμα) ιδιομορφία των μητρώων

... επιπλέον των $AB \neq BA$, $= 0$ ακόμα και αν $\neq 0, B \neq 0$, που έπεται από το θεώρημα Cayley-Hamilton:

Για τις δυνάμεις $A^n = -\gamma_{n-1}A^{n-1} - \gamma_{n-2}A^{n-2} - \dots + \gamma_1A + \gamma_0I$.

Δηλ. για κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, οι δυνάμεις μεγαλύτερες από $n - 1$ μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός χαμηλοτέρων δυνάμεων!

Για το αντίστροφο (αν υπάρχει)

$$\begin{aligned} 0 &= A^n + \gamma_{n-1}A^{n-1} + \dots + \gamma_1A + \gamma_0I \\ &= A^{-1} (A^n + \gamma_{n-1}A^{n-1} + \dots + \gamma_1A + \gamma_0I) \end{aligned}$$

επομένως

$$A^{-1} = -\frac{1}{\gamma_0} (A^{n-1} + \gamma_{n-1}A^{n-2} + \dots + \gamma_1I)$$

Παράδειγμα

$$\text{Δίνεται } A = \begin{pmatrix} -36 & 9 \\ -27 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda^2 + 9\lambda - 729 \\ &= \lambda^2 - \underbrace{-9}_{\text{trace}(A)} \lambda - \underbrace{729}_{\det(A)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 + 9A - 729I \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1053 & -81 \\ 243 & 486 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} -36 & 9 \\ -27 & 27 \end{pmatrix} - 729 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ 729I &= A^2 + 9I \Rightarrow 729A^{-1} = A + 9I \\ A^{-1} &= \frac{1}{729} \left(\begin{pmatrix} -36 & 9 \\ -27 & 27 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{729} \begin{pmatrix} -27 & 9 \\ -27 & 36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Βασικός ορισμός

Για κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και μεταβλητή λ , η ορίζουσα $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n . Λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και αν το γράψουμε

$$p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$$

τότε $\gamma_{n-1} = -\text{trace}(A)$ και $\gamma_0 = (-1)^n \det(A)$.

- Το πολυώνυμο έχει ακριβώς **n ρίζες** $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^n$ που αποκαλούμε **ιδιοτιμές** του .
- Γράφουμε $p(x) = (x - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (x - \lambda_k)^{\mu_k}$ όπου $k \leq n$ είναι το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών, $1 \leq \mu_j \leq k$ είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_j και $\sum_{j=1}^k \mu_k = n$. Το μ_j λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_j .
- Για κάθε ιδιοτιμή λ , υπάρχει **ιδιοδιάνυσμα** $x \in \mathbb{C}^n$ τ.ώ. **$Ax = \lambda x$** .
- Ισχύει ότι **$p(A) = 0$ (θεώρημα Cayley-Hamilton)**.
- τα **ιδιοζεύγη** (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα) μητρώων παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε πληθώρα εφαρμογών.
- Διαφορετικά μητρώα μπορεί να έχουν ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Άλλα πολυώνυμα: Ελάχιστο πολυώνυμο (minimal polynomial) I

Είδαμε ότι αν p_n είναι το χ.π. του $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τότε $p_n(A) = 0$. Το ερώτημα είναι αν υπάρχουν πολυώνυμα μικρότερου βαθμού, π.χ. $q_k, k < n$ τ.ώ. $q_k(A) = 0$.

Ορισμός

Το **ελάχιστο πολυώνυμο** ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι το ελάχιστου βαθμού πολυώνυμο q για οποίο ισχύει ότι $q(A) = 0$. Αν θέσουμε το μεγιστοβάθμιο συντελεστή ίσο με 1, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι **μονικό** και **μοναδικό**.

Το ελάχιστο πολυώνυμο του A διαιρεί ακριβώς το χ.π. του A .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$p(x) = (x-2)^4, q(x) = (x-2)^4$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, p(x) = (x-2)^4, q(x) = (x-2)^3$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, p(x) = (x-2)^4, q(x) = (x-2)^2$$

Άλλα πολυώνυμα: Ελάχιστο πολυώνυμο (minimal polynomial) II

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, p(x) = (x - 2)^4, q(x) = x - 2$$

Πρόταση

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Σχέδιο απόδειξης: Έστω ότι $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ όπου $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Τότε αν υπάρχουν μη μηδενικά γ_1, γ_2 τ.ώ.

$$0 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = \gamma_1 Ax_1 + \gamma_2 Ax_2 = \gamma_1 \lambda_1 x_1 + \gamma_2 \lambda_2 x_2.$$

Ισχύει επίσης ότι $0 = \lambda_2(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) = \lambda_2 \gamma_1 x_1 + \lambda_2 \gamma_2 x_2$ επομένως

$$\gamma_1 \lambda_1 x_1 + \cancel{\gamma_2 \lambda_2 x_2} = \lambda_2 \gamma_1 x_1 + \cancel{\lambda_2 \gamma_2 x_2}$$

δηλ. $0 = \gamma_1 \lambda_1 x_1 - \lambda_2 \gamma_1 x_1$ επομένως $\lambda_1 = \lambda_2$, άρα άτοπο.

Πόρισμα

Αν ένα μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε θα έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Διαγωνιοποίηση μητρώου I

Έστω ότι γνωρίζουμε η ιδιοζεύγη (λ_j, x_j) του $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2, \dots, Ax_n = \lambda_n x_n$$

Συλλέγουμε και διατυπώνουμε με μητρώα:

$$A[x_1, x_2, \dots, x_n] = [x_1, \dots, x_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

Επομένως

$$AX = X\Lambda,$$

όπου $\Lambda = \text{diag}([\lambda_1, \dots, \lambda_n])$ και $X = [x_1, \dots, x_n]$.

ΠΡΟΣΕΞΤΕ Αν το X είναι **αντιστρέψιμο**,

$$X^{-1}AX = \Lambda,$$

δηλ. χρησιμοποιώντας τα μητρώα X (με στήλες τα **δεξιά ιδιοδιανύσματα**) και X^{-1} (με στήλες του X^{-*} τα **αριστερά ιδιοδιανύσματα**) **διαγωνιοποιήσαμε** το A .

Κάθε μητρώο για το οποίο υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα χαρακτηρίζεται ως **διαγωνιοποιήσιμο**, ειδάλλως λέγεται **μη διαγωνιοποιήσιμο**.

Θεώρημα: Ένα μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο αν και μόνον αν το ελάχιστο πολυώνυμο του μητρώου έχει απλές ρίζες.

Ιδιοδιανύσματα: Δεξιά και Αριστερά

Θα συμβολίζουμε $x^* = \bar{x}^\top$ και $A^* = \bar{A}^\top$ τα συζυγές (ή ερμιτιανό) ανάστροφο του (μιγαδικού) διανύσματος $x \in \mathbb{C}^n$ και του (μιγαδικού) μητρώου A .

$Av \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $\lambda \in \Lambda(A)$ τότε $\det(\lambda I - A) = 0$ άρα αν συμβολίσουμε με r την τάξη του $\lambda I - A$,

$$r = \text{rank}(\lambda I - A) \leq n - 1.$$

Αφού το μητρώο είναι τετραγωνικό, οι διαστάσεις του μηδενόχωρου και του αριστερού μηδενόχωρου του $A - \lambda I$ είναι ίσες και

$$1 \leq n - r = \dim(\text{null}(\lambda I - A)) = \dim(\text{null}(\bar{\lambda} I - A^*)) \leq n - 1$$

Ιδιοδιανύσματα είναι τα μέλη των μηδενόχωρων αυτών:

δεξιά ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ είναι τα $x \in \text{null}(\lambda I - A)$ δηλ. τ.ώ. $Ax = \lambda x$.

αριστερά ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ είναι τα $y \in \text{null}(\bar{\lambda} I - A^*)$, δηλ. τ.ώ. $y^* A = \lambda y^*$.

Άρα για κάθε ιδιοτιμή λ υπάρχουν

διανύσματα $x \in \text{null}(A - \lambda I)$ ώστε $Ax = \lambda x$ που λέγονται **δεξιά ιδιοδιανύσματα** του A για την ιδιοτιμή λ .

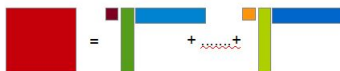
διανύσματα $y \in \text{null}(A^* - \bar{\lambda} I)$ ώστε $y^* A = \lambda y^*$ που λέγονται **αριστερά ιδιοδιανύσματα** του A για την ιδιοτιμή λ .

Ανάπτυγμα μητρώου συναρτήσει ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Αν το μητρώο A διαθέτει n γ.α. ιδιοδιοδιανύσματα, τότε $A = X\Lambda X^{-1}$ όπου Λ το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών και X το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων. Θυμηθείτε τη γραφή γινομένου μητρώων ως άθροισμα μητρώων πρώτης τάξης (στήλη του 1ου επί γραμμή του 2ου).

Θέτουμε για ευκολία $Y = (X^{-1})^*$, δηλ. Y είναι το συζυγές αντίστροφο του X , τότε μπορούμε να γράψουμε το A με βάση το **φασματικό ανάπτυγμα**.

$$\begin{aligned} A &= X\Lambda Y^* \\ &= \lambda_1 x_1 y_1^* + \lambda_2 x_2 y_2^* + \cdots + \lambda_n x_n y_n^* \end{aligned}$$



Ιδιόχωροι και γεωμετρική πολλαπλότητα ιδιοτιμής

Προσοχή: Για κάθε διαφορετική ιδιοτιμή λ_j :

- ο μηδενόχωρος $\text{null}(\lambda_j I - A)$ λέγεται **ιδιόχωρος** της ιδιοτιμής λ_j .
- Η διάσταση του ιδιόχωρου χαρακτηρίζεται ως **γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής** λ_j .
- Για κάθε ιδιοτιμή ισχύει ότι

$$1 \leq \text{γεωμ. πολλαπλ.}(\lambda_j) \leq \text{αλγεβρ. πολλαπλ.}(\lambda_j)$$

- Αν μία ή περισσότερες ιδιοτιμές ενός μητρώου έχουν γεωμετρική πολλαπλότητα μικρότερη της αλγεβρικής τους, δηλ.

$$1 \leq \text{γεωμ. πολλαπλ.}(\lambda_j) < \text{αλγεβρ. πολλαπλ.}(\lambda_j)$$

αυτές λέγονται **ελλειμματικές** ή **ελαττωματικές** ή **ελλιπείς** ⁴ και το μητρώο **ελλειμματικό** ή **ελαττωματικό** ή **ελλιπές**.

- Τα ελλειμματικά μητρώα είναι **μη διαγωνιοποιήσιμα**.

⁴defective

Μητρώα: διαγωνιοποιήσιμα και μη

- Κάθε μητρώο $n \times n$ έχει ακριβώς n ιδιοτιμές. Μπορεί όμως να μην υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα οπότε δεν θα είναι διαγωνιοποιήσιμο.

Παράδειγμα $= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ Κάθε διάνυσμα x τ.ώ $Ax = \lambda x$ είναι πολλαπλάσιο του $x = [1, 0]^T$.

Παράδειγμα $A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{4}{3} \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Έχει ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ με πολλαπλότητα $\mu_1 = 2$. Κάθε διάνυσμα x τ.ώ $Ax = \lambda x$ είναι πολλαπλάσιο του $x = [-\frac{2}{3}, 1]^T$.

- Αν υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων X είναι αντιστρέψιμο και επομένως θα είναι διαγωνιοποιήσιμο. Ένα μητρώο $n \times n$ είναι διαγωνιοποιήσιμο αν και μόνον αν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
- Αν ένα μητρώο $n \times n$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές, θα έχει n γ.α. ιδιοδιανύσματα και θα είναι διαγωνιοποιήσιμο.
- Αν ένα μητρώο έχει επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές, το μητρώο **ενδέχεται να μην είναι διαγωνιοποιήσιμο**. Για να εξακριβωθεί το κατά πόσον είναι διαγωνιοποιήσιμο, χρειάζεται περισσότερη διερεύνηση. Π.χ. αποδεικνύεται ότι τα δύο τελευταία μητρώα δεν είναι διαγωνιοποιήσιμα.

Ομοιότητα μητρώων

Δύο μητρώα $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λέγονται **όμοια** αν υπάρχει αντιστρέψιμο $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιο ώστε $P^{-1}AP = B$.

Αν τα μητρώα A, B είναι όμοια τότε έχουν ίδια:

- τάξη
- ορίζουσα και ίχνος
- χαρακτηριστικό πολυώνυμο, ιδιοτιμές και γεωμετρική τους πολλαπλότητα.
- ελάχιστο πολυώνυμο

Ενδιαφέρουσα ιδιότητα: Αν $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τότε τα γινόμενα $F = AB$ και $G = BA$ θα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Απόδειξη: Αν ένα από τα A, B είναι αντιστρέψιμο, έστω το A , τότε τα F, G είναι όμοια ($A^{-1}(AB)A = BA$).. Αν κανένα από τα μητρώα δεν είναι αντιστρέψιμο, έστω ότι $x \neq 0$ για το οποίο $Bx = 0$. Άρα $ABx = 0$ άρα το 0 είναι ιδιοτιμή του AB . Επίσης υπάρχει $y \neq 0$ τ.ώ. $Ay = 0$. Άρα $(BA)y = 0$, άρα το 0 είναι ιδιοτιμή και του BA . Προσοχή: Οι ιδιοτιμές του γινομένου δεν είναι ίσες με τα γινόμενα των ιδιοτιμών.

Πολλαπλές ιδιοτιμές και ελλειμματικά μητρώα

- Σε κάθε απλή ιδιοτιμή (αλγ. πολλ/τας ίσης με 1) αντιστοιχούν ένα δεξιό και ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα.
- Τι γίνεται όταν μια ιδιοτιμή, π.χ. λ_j , έχει αλγ. πολλ/τα $\mu_j > 1$?
- Το κρίσιμο ερώτημα είναι κατά πόσον υπάρχουν μ_j γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα⁵
- Είναι κρίσιμο γιατί αν για κάθε ιδιοτιμή υπάρχουν τόσα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα όσα και η αλγεβρική της πολλαπλότητα, τότε το μητρώο δεν είναι ελλειμματικό, άρα είναι διαγωνιοποιήσιμο.
- Επίσης τότε μπορούμε με τα ιδιοδιανύσματα να κατασκευάσουμε βάση για όλον το διανυσματικό χώρο ($\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$) που μπορεί να έχει πλεονεκτήματα συγκριτικά με την τυπική βάση.

⁵ Στη συνέχεια θα εννοούμε τα δεξιά ιδιοδιανύσματα, αλλά το ίδιο ισχύει για τα αριστερά.

Ιδιότητες ιδιοζευγών συμμετρικών/ερμιτιανών μητρώων I

Τα πραγματικά συμμετρικά ($A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$) καθώς και τα μιγαδικά ερμιτιανά ($A = \bar{A}^T \in \mathbb{C}^{n \times n}$) μητρώα έχουν πολλές ευχάριστες ιδιότητες που διευκολύνουν σημαντικά σε πολλές περιπτώσεις.

Οι παρακάτω αποδείξεις είναι προαιρετικές.

Αν το μητρώο είναι πραγματικό συμμετρικό, $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και αν το λ είναι ιδιοτιμή,

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow x^* A^T = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \bar{\lambda} \|x\|^2 = x^* (Ax) = \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

Αν το μητρώο είναι ερμιτιανό, $A^* = A$ και τότε αν λ είναι ιδιοτιμή,

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n} \Rightarrow x^* A^* = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2 \bar{\lambda} = x^* (Ax) = \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

άρα, επειδή $\|x\| \neq 0$,

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ιδιότητες ιδιοζευγών συμμετρικών/ερμιτιανών μητρώων II

Αποδείξαμε ότι:

Οι ιδιοτιμές των ερμιτιανών και των πραγματικών συμμετρικών μητρώων είναι όλες πραγματικές. Επίσης, αν το μητρώο είναι πραγματικό και συμμετρικό, $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε και τα ιδιοδιανύσματα είναι πραγματικά.

Έστω ότι $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και ότι $\lambda \neq \mu$ είναι δύο διακριτές ιδιοτιμές του και ότι

$$\begin{aligned}Ax &= \lambda x, & Ay &= \mu y \\y^T Ax &= \lambda y^T x = y^T A^T x \\(Ay)^T x &= \mu y^T x \Rightarrow \mu(y^T x) = \lambda(y^T x)\end{aligned}$$

οπότε είτε $\lambda = \mu$ ή $y^T x = 0$. Αποδείξαμε ότι

Τα ιδιοδιανύσματα ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι πάντοτε ορθογώνια μεταξύ τους.

Ιδιότητες ιδιοζευγών συμμετρικών/ερμιτιανών μητρώων III

Προσοχή: Η συζήτηση από την τρέχουσα διαφάνεια μέχρι τη διαφάνεια πριν τη Σύνοψη Ιδιοτήτων Πραγματικών Συμμετρικών Μητρώων **είναι ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΗ**
Τι συμβαίνει για τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε πολλαπλές ιδιοτιμές?

Περιοριζόμαστε στην πραγματική περίπτωση, $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Έστω ότι $Aq_1 = \lambda_1 q_1$ όπου επιλέξαμε το q_1 να είναι μοναδιαίο. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε τις στήλες του μητρώου $Q_1 = [q_1, *, \dots, *]$ ώστε $Q_1^T Q_1 = I$. Δηλαδή, οι υπόλοιπες στήλες του Q_1 επελέγησαν ορθογώνιες στο q_1 (κάτι που μπορούμε να υλοποιήσουμε χωρίς μεγάλη δυσκολία, π.χ. με τη διαδικασία Gram-Schmidt).

Άρα

$$\begin{aligned} AQ_1 &= [\lambda_1 q_1, *, \dots, *] = \overbrace{[q_1, *, \dots, *]}^{Q_1} [\lambda_1 e_1, *, \dots, *] \\ Q_1^T AQ_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ιδιότητες ιδιοζευγών συμμετρικών/ερμιτιανών μητρώων IV

όπου $A_2 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$. Έστω ότι μία ιδιοτιμή του A_2 είναι η λ_2 (που μπορεί να είναι ίση ή διαφορετική του λ_1). Μπορούμε να κατασκευάσουμε το μητρώο

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \star & \cdots & \star \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε $A_2 q_2 = \lambda_2 q_2$ και το Q_2 είναι ορθογώνιο. Επομένως

$$(Q_1^T A Q_1) Q_2 = Q_2 \left(\begin{array}{cc|ccc} \lambda_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right)$$

άρα

$$Q_2^T (Q_1^T A Q_1) Q_2 = \left(\begin{array}{cc|ccc} \lambda_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right)$$

Ιδιότητες ιδιοζευγών συμμετρικών/ερμιτιανών μητρώων V

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, ανεξαρτήτως των πολλαπλοτήτων των ιδιοτιμών, θα έχουμε υπολογίσει ορθογώνια μητρώα $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ τέτοια ώστε

$$Q_{n-1}^T \cdots Q_2^T Q_1^T A Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & 0 & \lambda_3 & \star & \cdots \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Όπως γνωρίζουμε, το γινόμενο ορθογώνιων μητρώων είναι και αυτό ορθογώνιο, επομένως το $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-1}$ είναι ορθογώνιο.

Ιδιότητες ιδιοζευγών συμμετρικών/ερμιτιανών μητρώων VI

Αποδείξαμε ότι για κάθε συμμετρικό μητρώο A , υπάρχει ορθογώνιο μητρώο Q τέτοιο ώστε το $Q^T A Q = T$ να είναι **άνω τριγωνικό** και να περιέχει τις ιδιοτιμές του A στη διαγώνιο. Λόγω συμμετρίας του, $(Q^T A Q)^T = T^T = Q^T A Q = T$ επομένως το T είναι **τριγωνικό** και **συμμετρικό** άρα θα είναι **διαγώνιο**!

Επομένως:

Ιδιότητες

Ανεξάρτητα από τις ενδεχόμενες πολλαπλότητες των ιδιοτιμών: Κάθε πραγματικό συμμετρικό μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο.

Παρατηρήσεις:

- Στην παραπάνω απόδειξη, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ορθομοναδιαία μητρώα αντί για ορθογώνια, δηλ. $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοια ώστε $U^* U = I$. Τότε δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι το μητρώο είναι συμμετρικό και μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε μητρώο A , υπάρχει ορθομοναδιαίο μητρώο U τέτοιο ώστε το $U^* A U = T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ να είναι **άνω τριγωνικό**.

Ιδιότητες ιδιοζευγών συμμετρικών/ερμιτιανών μητρώων VII

Κάθε συμμετρικό πραγματικό ή ερμιτιανό μητρώο διαθέτει ακριβώς n ιδιοδιανύσματα που είναι κάθετα μεταξύ τους. Δηλαδή διαθέτει πλήρες σύνολο **ορθογώνιων** ιδιοδιανυσμάτων.

$$\begin{aligned} A[q_1, \dots, q_n] &= [q_1, \dots, q_n]\Lambda \Leftrightarrow [q_1, \dots, q_n]^T A[q_1, \dots, q_n] = \Lambda \\ \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} &= \mathbf{\Lambda} \end{aligned}$$

Φασματικό ανάπτυγμα πραγματικού συμμετρικού/μιγαδικού ερμιτιανού μητρώου

- Αν $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με ιδιοζεύγη $\{(\lambda_i, q_i), i = 1, \dots, n\}$ τότε
 $A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \dots + \lambda_n q_n q_n^T$
- Αν $A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με ιδιοζεύγη $\{(\lambda_i, q_i), i = 1, \dots, n\}$ τότε
 $A = \lambda_1 q_1 q_1^* + \dots + \lambda_n q_n q_n^*$

Σύνοψη ιδιοτήτων πραγματικών συμμετρικών μητρώων

Ιδιότητες

Αν $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τότε

- όλες οι ιδιοτιμές είναι **πραγματικές**,
- υπάρχουν n **γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα**, $\{q_1, \dots, q_n\}$, που είναι βάση για τον χώρο,
- τα ιδιοδιανύσματα είναι **κάθετα** μεταξύ τους, άρα $Q^T Q = I$,
- τα ιδιοδιανύσματα είναι πραγματικά αν το μητρώο είναι πραγματικό,
- το μητρώο είναι **διαγωνιοποιήσιμο**,
- $Q^T A Q = \Lambda$.
- Ισχύει το φασματικό ανάπτυγμα: $A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \dots + \lambda_n q_n q_n^T$

Παρατήρηση 4

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για τα ερμιτιανά μητρώα ή $A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Συμμετρικά θετικά ορισμένα μητρώα

Έχουμε αναφέρει σε προηγούμενη διάλεξη ότι πολλά μητρώα στις εφαρμογές έχουν την ιδιότητα ότι είναι Συμμετρικά Θετικά Ορισμένα. Είπαμε ότι για τα μητρώα είναι κάτι ανάλογο της θετικότητας στους αριθμούς.

Ορισμός 3

Δίνεται συμμετρικό $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Οι παρακάτω ιδιότητες είναι ισοδύναμες :

- 1 Για κάθε $x \neq 0$, $x^T A x > 0$.
- 2 Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες θετικές.
- 3 Για $k = 1, \dots, n$, $\det A_{1:k, 1:k} > 0$.
- 4 Αν $A = LU$ είναι η παραγοντοποίηση LU του A , όλοι οι οδηγοί (τα διαγώνια στοιχεία του U) είναι θετικοί.

Αν ισχύει μία από αυτές, το μητρώο καλείται **συμμετρικό θετικά ορισμένο (ΣΘΟ)**.

Παρατήρηση 5

Όταν ένα μητρώο είναι ΣΘΟ τότε

- όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι θετικά.
- είναι αντιστρέψιμο.
- υπάρχει κάτω τριγωνικό L τέτοιο ώστε $A = LL^T$.

Μέθοδος δύναμης

Πρόκειται για μια απλή μέθοδο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και για **πολύ μεγάλα** μητρώα (υπο περιορισμούς). Με τη μέθοδο περοσεγγίζουμε ένα ιδιοδιάνυσμα κάθε φορά (αυτό που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη σε απόλυτη τιμή ιδιοτιμή).

Αν η μέγιστη σε απόλυτη τιμή ιδιοτιμή, έστω $\lambda_{\max}$, ενός $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι μοναδική με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα q_1 , και έστω $x \in \mathbb{C}^n$ τυχαίο, τ.ώ. $x^* q_1 \neq 0$, τότε η ακολουθία των διανυσματων $\{Ax, A^2x, \dots, A^kx, \dots\}$ τείνει σε διάνυσμα του ιδιόχωρου του $\lambda_{\max}$.

Σε περίπτωση που η μέγιστη σε απόλυτη τιμή ιδιοτιμή είναι μοναδική, τότε τείνει σε διάνυσμα συγγραμμικό του q_1 . (προσεγγίζεται το **μέγιστο ιδιοδιάνυσμα**!)

$$A^k x = \lambda_1^k (\gamma_1 q_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k q_2 + \dots$$

Όπως φαίνεται, για επαρκώς μεγάλο k , η κατεύθυνση q_1 θα υπερτερεί, και με βάση κάποια κριτήρια, το $\frac{A^k x}{\|A^k x\|}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσέγγιση του q_1 . Η διαδικασία είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική αν $|\lambda_1|$ είναι πολύ μεγαλύτερο από το $\max\{|\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$. Επίσης για μεγάλα k , το πηλίκο $\left(\frac{x^* A^k x}{x^* x}\right)^{1/k}$ θα προσεγγίζει τη μέγιστη ιδιοτιμή.

Συμπληρωματικά θέματα (δεν συζητήθηκαν στην τάξη)

ΚΑΛΕΣ ΓΙΟΡΤΕΣ 🎄!

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα δυνάμεων μητρώου

- Για κάθε A , αν $Ax = \lambda x$ τότε $A^k x = \lambda^k x$
- ομοίως $\gamma A^i x + \delta A^k x = \gamma \lambda^i x + \delta \lambda^k x$
- άρα αν οι ιδιοτιμές του A είναι $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ τότε οι ιδιοτιμές του πολυωνύμου $q(A) = \gamma_s A^s + \dots + \gamma_0 I$, είναι

$$\begin{array}{rcl} q(\lambda_1) & = & \gamma_s \lambda_1^s + \dots + \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_0 I \\ & \vdots & \\ q(\lambda_n) & = & \gamma_s \lambda_n^s + \dots + \gamma_1 \lambda_n + \gamma_0 I \end{array}$$

δηλ. οι ιδιοτιμές του $q(A)$ είναι οι τιμές $\{q(\lambda_1), \dots, q(\lambda_n)\}$.

Συμπεράσματα

- Επομένως αν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές του A μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές για οποιοδήποτε πολυώνυμο $q(A)$.
- Τα ιδιοδιανύσματα του $q(A)$ είναι ίδια με τα ιδιοδιανύσματα του A .

Διαχείριση δυνάμεων μητρώου μέσω διαγωνιοποίησης

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και ότι γνωρίζουμε X, Λ όπως πριν, δηλ. $X^{-1}AX = \Lambda$.

$$\begin{aligned} A &= X\Lambda X^{-1} \\ A^k &= (X\Lambda X^{-1})^k = (X\Lambda X^{-1})(X\Lambda X^{-1}) \cdots (X\Lambda X^{-1}) \\ &= X\Lambda(X^{-1}X)\Lambda(X^{-1}X)\Lambda \cdots (X^{-1}X)\Lambda X^{-1} \\ &= X\Lambda^k X^{-1}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ο υπολογισμός του A^k ανάγεται στον εύκολο υπολογισμό του Λ^k και σε δύο επιμέρους πολλαπλασιασμούς μητρώων, π.χ. $X\Lambda^k \rightarrow (X\Lambda^k)X^{-1}$.

Πέραν του υπολογισμού του A^k , η διάσπαση του μητρώου σε $A = X\Lambda X^{-1}$ διευκολύνει στην διερεύνηση του παρακάτω ζητήματος.

Πώς συμπεριφέρεται το A^k για μεγάλες τιμές του k ?

- Υπάρχει κάτι το ιδιαίτερο?
- Υπάρχει όριο, δηλ. κάποιο B τ.ω. $\lim_k A^k = B$ υπό την έννοια ότι $\forall \epsilon > 0, \exists \hat{k}$ τ.ω. $\|A^k - B\| < \epsilon, \forall k > \hat{k}$?
- Ποιό είναι αυτό?

Παράδειγμα Ι

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό για οποιοδήποτε k επιθυμούμε, προκύπτει το ζητούμενο, αφού στοργυλέψουμε

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0.5062 & -0.4938 & 0 \\ -0.4938 & 0.5062 & 0 \\ -0.4938 & 0.4938 & 0.0123 \end{pmatrix}, A^{10} = \begin{pmatrix} 0.5000 & -0.5000 & 0 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

Οι τιμές έχουν υποστεί στοργγύλευση.

Παράδειγμα II

Καθώς $k \rightarrow \infty$,

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

οι όροι στο διαγώνιο μητρώο Λ^k που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $|\lambda| < 1$ τείνουν στο 0, επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} A^k &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Συνοδευτικό μητρώο

Από τα πολυώνυμα στα μητρώα

Για κάθε πολυώνυμο p βαθμού n , υπάρχει μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με χ.π. ίδιο με p .

Το $p(z) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ είναι το χ.π. του

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ το συνοδευτικό μητρώο του } p.$$

(υπολ. ριζών πολυωνύμου βαθμού n) $\equiv$ (υπολ. ιδιοτιμών συνοδευτικού μητρώου)

Επίλυση γραμμικού συστήματος μέσω φασματικού αναπτύγματος

Αν γνωρίζουμε τα X, Λ ώστε $X^{-1}AX = \Lambda$ και αναζητούμε το x τ.ώ. $Ax = b$,

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ X^{-1}AXX^{-1}x &= X^{-1}b \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x &= X\Lambda^{-1}X^{-1}b \\ &= \frac{1}{\lambda_1}x_1(y_1^*b) + \frac{1}{\lambda_2}x_2(y_2^*b) + \cdots \frac{1}{\lambda_n}x_n(y_n^*b) \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Ο τρόπος αυτός επίλυσης σπάνια συμφέρει ...

πιο χρήσιμο είναι η πληροφορία που παρέχει αναδεικνύοντας ορισμένα χαρακτηριστικά της λύσης! π.χ. πως μεγεθύνονται οι παράγοντες που αντιστοιχούν σε όρους όπου $y_j^*b \neq 0$ και η απόλυτη τιμή $|\lambda_j|$ είναι πολύ μικρή (αν είναι 0, το μη-τρώο δεν αντιστρέφεται).

ΠΡΟΣΟΧΗ Τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν μόνον όταν έχουμε **ένα** εμπλεκόμενο μητρώο και δυνάμεις του.

Γενικά - δύο αρνητικά αποτελέσματα και ένα που θα εξετάσουμε:

- $\Lambda(A + B) \neq \Lambda(A) + \Lambda(B)$
- υπάρχουν $\lambda \in \Lambda(AB)$ τέτοια ώστε $\lambda \neq \lambda_i(A)\lambda_j(B)$ για κανένα i, j

Το πρώτο δεν εκπλήσσει, εξάλλου $\det(A) + \det(B) \neq \det(A + B)$.

Σχετικά με το γινόμενο: Θυμηθείτε ότι $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$. Για τις ιδιοτιμές δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο με την 1η ισότητα. Υπάρχει όμως κάτι αντίστοιχο με τη δεύτερη ισότητα.

Στη συνέχεια εξετάζουμε πως συνδέονται οι ιδιοτιμές $\Lambda(AB)$ με τις ιδιοτιμές $\Lambda(BA)$.

Ιδιοτιμές γινομένου μητρώων (προαιρετικό)

Θα επεκτείνουμε το αποτέλεσμα ότι οι ιδιοτιμές του AB είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του BA . Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Προσοχή, τα μητρώα A, B δεν είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικά, το γινόμενό τους όμως πρέπει να είναι! Τότε αν

$$X = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0_{m,n} \\ B & 0_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{m,m} & 0_{m,n} \\ B & BA \end{pmatrix}$$

Έστω ότι $m \geq n$, τότε

$$(\lambda_1(AB), \dots, \lambda_n(AB), \lambda_{n+1}(AB), \dots, \lambda_m(AB), \overbrace{0, \dots, 0}^n) = (\lambda_1(BA), \dots, \lambda_n(BA), \underbrace{0, \dots, 0}_m)$$

επομένως οι ιδιοτιμές του AB είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του BA συν επιπλέον μία **μηδενική ιδιοτιμή πολλαπλότητας $m - n$** .

$$\Lambda(AB) = \Lambda(BA) \cup \{0\}$$

Ιδιοδιανύσματα και μεταθετικότητα

Γνωρίζουμε ότι γενικά $AB \neq BA$. Υπάρχουν προφανώς ειδικές περιπτώσεις που η μεταθετικότητα ισχύει (π.χ. διαγώνια μητρώα). Τι άλλο μπορούμε να πούμε?

Θεώρημα 1

Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμα με τα ίδια ιδιοδιανύσματα, δηλ.

$$\exists X \text{ τ.ώ. } X^{-1}AX = \Lambda_A, \quad X^{-1}BX = \Lambda_B.$$

τότε $AB = BA$. Επίσης, αν $AB = BA$ τότε υπάρχει κοινός διαγωνιοποιητής X .

Παράδειγμα 6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & -11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = BA$$

. Αυτό συμβαίνει γιατί αν $D_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $D_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ και $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, τότε

$$X^{-1}AX = D_A, \quad X^{-1}BX = D_B.$$

Περιγραφή

Είδαμε ότι δεν είναι όλα τα τετραγωνικά μητρώα διαγωνιοποιήσιμα. Τίθεται το ερώτημα τι γίνεται στην (ομολογουμένως, σπανιότερη) περίπτωση που για ένα μητρώο A δεν υπάρχει αντιστρέψιμο X τ.ώ. να είναι διαγώνιο το $A^{-1}AX$. Πόσο απλό μπορούμε να κάνουμε γενικό μητρώο A με μετασχηματισμό ομοιότητας;

Η κανονική μορφή Jordan είναι η απλούστερη μορφή στην οποία μπορούμε να αναγάγουμε κάθε τετραγωνικό μητρώο με μετασχηματισμό ομοιότητας, υπό την προϋπόθεση ότι το κριτήριο της απλότητας είναι το μητρώο να μοιάζει όσο γίνεται σε διαγώνιο.

Κανονική μορφή Jordan II

Αν το μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο, τότε η μορφή Jordan είναι το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών.

Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, υπάρχει μητρώο $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιο ώστε

$$X^{-1}AX = J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_q \end{pmatrix}$$

- Σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχούν όσα υπομητρώα Jordan είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της.
- Το άθροισμα των διαστάσεων των υπομητρώων Jordan για μία ιδιοτιμή είναι ίσο με την αλγεβρική πολλαπλότητα της.
- Κάθε J_i αποκαλείται απλό (υπο)μητρώο Jordan και έχει τη μορφή

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}, \quad \text{όπου} \quad \sum_{i=1}^q k_i = n.$$

- Αν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής ισούται με την αλγεβρική, τότε όλα τα blocks είναι μεγέθους 1×1 και το μητρώο είναι διαγώνιο.
- Όποτε η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι μικρότερη, τότε εμφανίζονται «1» στην υπερδιαγώνιο.
- Η διαγώνιος περιέχει όλες τις ιδιοτιμές επαναλαμβανόμενες με την αντίστοιχη πολλαπλότητά τους.

Καλά νέα 1) Η μορφή Jordan αποκαλύπτει τη φασματική δομή του μητρώου. 2) Αποτελεί μία σημαντική **κανονική μορφή** μητρώου (υπάρχουν και άλλες).

Κακά νέα Αν και ενδιαφέρουσα από μαθηματικής άποψης, υπάρχουν εγγενείς δυσκολίες στον υπολογισμό της μορφής Jordan.

Τι γίνεται στην πράξη Αναζητούμε άλλες κανονικές μορφές.

Σημαντικές κανονικές μορφές

Schur υπάρχει πάντα ορθομοναδιαίο Q τέτοιο ώστε $Q^*AQ = R$ είναι **άνω τριγωνικό**.

SVD υπάρχουν πάντα ορθομοναδιαία U, V τέτοια ώστε το $U^*AV = \Sigma$ να είναι **διαγώνιο** (με μη αρνητικά στοιχεία!)