

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 10

Ίχνος Ορίζουσα

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

16 Δεκεμβρίου 2025

Ειδικές (βαθμωτές) τιμές μητρώων

Παρόλο που ένα μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ περιέχει $m \times n$ αριθμούς, σε αυτό αντι-στοιχούν επίσης ορισμένες **ειδικές τιμές** συνδεδεμένες με αυτό. Αυτές είναι βαθμωτές συναρτήσεις μητρώου ($f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$), που μπορούν να **αποκαλύψουν** σημαντικές πληροφορίες για το μητρώο.

είδος	συμβολισμός	παρατηρήσεις
διαστάσεις	m, n	αριθμ. γραμμών και αριθμ. στηλών
αραιότητα	$\text{nnz}(A)$	πλήθος μη μηδενικών
τάξη	$\text{rank}(A)$	μέγιστος αριθμ. γ.α. γραμμών (ή στηλών)
νόρμα	$\ A\ $	μετρική ((βάρους)) , π.χ. $\sup_{x \neq 0} \frac{\ Ax\ }{\ x\ }$
ίχνος	$\text{trace}(A)$	$(m = n) ???$
ορίζουσα	$\det(A)$	$(m = n) ???$
ιδιοτιμές	$???$	$(m = n) ???$
ιδιάζουσες τιμές	$???$	$???$

1. Ίχνος

- Χαρακτηριστική τιμή για κάθε τετραγωνικό μητρώο ίση με το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του.
- Βαθμωτή συνάρτηση

$$\text{trace} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε

$$\text{trace}(A) := \alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \cdots + \alpha_{n,n}$$

Ιδιότητες

- 1 $\text{trace}(\gamma A + \delta B) = \gamma \text{trace}(A) + \delta \text{trace}(B)$
- 2 $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$

Σημαντικό επακόλουθο: $\text{trace}(X^{-1}AX) = \text{trace}(A)$

2. Ορίζουσα

- Μοναδικό **χαρακτηριστικό μέγεθος** (βαθμωτός) που υπάρχει για κάθε τετραγωνικό μητρώο.

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Συμπυκνώνει πληροφορίες σχετικά με το μητρώο.
- Η πιο γνωστή: Ένα μητρώο A είναι **αντιστρέψιμο** αν και μόνον αν $\det(A) \neq 0$.
- Υπολογιστικά θέματα: Ο πιο πρακτικός τρόπος υπολογισμού του για μέτριο ή μεγάλο n είναι ως παραπροϊόν της παραγοντοποίησης LU με το αντίστοιχο κόστος.
- Γεωμετρική ερμηνεία: όγκος στερεού στο n -διάστατο χώρο.

Ιστορικά

- Η μελέτη των οριζουσών προηγήθηκε της Γραμμικής Άλγεβρας: Ο Gauss (1801) χρησιμοποίησε τον όρο εννοώντας την διακρίνουσα πολυωνύμων 4ου βαθμού. Ο όρος με τη σημερινή έννοια εισήχθη από τον Cauchy (1812).
- Ο Sylvester ((βάππισε)) τις "μήτρες" για να αναδείξει ότι ((γεννούν)) ορίζουσες.

150

On a new Class of Theorems.

[25]

its form of greatest generality. For this purpose we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of m lines and n columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p , and selecting at will p lines and p

37]

Linearly Equivalent Quadratic Functions.

247

I have in previous papers defined a "Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent; these cognate determinants being by no means isolated in their relations to one another, but subject to certain simple laws of mutual dependence and simultaneous deperition. The con-

Τύπος ορίζουσας όταν $n = 2$

$$\underline{n = 2}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} := \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε έναν αξιωματικό ορισμό της ορίζουσας από τον οποίο θα προκύψει αυτός και άλλο τύποι υπολογισμού.

Παρατήρηση: Να επαληθεύσετε την παρακάτω παραγοντοποίηση.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{21}\alpha_{11}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12} \end{pmatrix}$$

- Έστω μια μετάθεση $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ των αριθμών 1 ως n. Ονομάζουμε **φυσική διάταξη** την n-άδα $(1, 2, \dots, n)$. Τότε **πρόσημο της μετάθεσης** ονομάζεται ο αριθμός

$$\sigma(\pi) = \begin{cases} +1 & \text{αν η } \pi \text{ επανέρχεται στη φυσική διάταξη} \\ & \text{με άρτιο πλήθος εναλλαγών} \\ -1 & \text{αν η } \pi \text{ επανέρχεται στη φυσική διάταξη} \\ & \text{με περιτό πλήθος εναλλαγών.} \end{cases}$$

- Έστω δ.χ. $U_1, \dots, U_n$ και W επί του ιδίου σώματος $\mathcal{F}$ και έστω η απεικόνιση

$$f : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow W$$

Η απεικόνιση ονομάζεται **πλειογραμμική (multilinear)** αν είναι γραμμική ως προς κάθε όρισμα αν τα υπόλοιπα ορίσματα μείνουν αμετάβλητα. Στην επόμενη διαφάνεια θα δούμε ένα παράδειγμα πλειογραμμικής συνάρτησης με τον οποίο θα γίνει καλύτερα αντιληπτός ο παραπάνω αφηρημένος ορισμός.

Ορίζοντας την ορίζουσα (αξιωματικά)

Η ορίζουσα $\det(A)$ ενός τετραγωνικού μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι μία συνάρτηση

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

που έχει τις εξής **3 ιδιότητες** για ένα μητρώο $= [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (χρησιμοποιούμε τις στήλες a_i , αντίστοιχα θα μπορούσε να γίνει η συζήτηση χρησιμοποιώντας τις γραμμές):

- 1 Αν $a_i = a_j$ για $i \neq j$ τότε $\det([a_1, \dots, a_n]) = 0$ (εκφυλισμός).
- 2 $\det([e_1, \dots, e_n]) = 1$ (κανονικότητα).
- 3 Η συνάρτηση είναι γραμμική ως προς τις n στήλες (αντίστοιχα, γραμμές):

$$\begin{aligned} \det([a_1, \dots, a_{j-1}, \gamma a + \delta b, a_{j+1}, \dots, a_n]) &= \gamma \det([a_1, \dots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \dots, a_n]) \\ &\quad + \delta \det([a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n]) \end{aligned}$$

Συναρτήσεις με αυτή την ιδιότητα λέγονται **πλειογραμμικές**.

Έστω το μητρώο (σε μορφή στηλών) $= [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Αν εναλλάξουμε 2 στήλες ενός μητρώου, η ορίζουσα του νέου μητρώου έχει ίδιο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο. Γι' αυτό η ορίζουσα χαρακτηρίζεται και ως **εναλλάσσουσα απεικόνιση** (alternating map).

- δείγμα απόδειξης

$$\begin{aligned} 0 &= \det([a_1 + a_2, a_1 + a_2]) = \det([a_1, a_1]) + \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) + \det([a_2, a_2]) \\ 0 &= \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) \end{aligned}$$

- Αν οι στήλες μητρώου είναι γραμμικά εξαρτημένες, η ορίζουσα είναι 0.
- δείγμα απόδειξης

$$\det([a_1, a_2, \gamma a_1 + \delta a_2]) = \gamma \det([a_1, a_2, a_1]) + \delta \det([a_1, a_2, a_2]) = 0$$

- Αν προσθέσουμε δύο στήλες η ορίζουσα παραμένει αμετάβλητη.
- δείγμα απόδειξης

$$\det([a_1, a_1 + a_2]) = \det([a_1, a_1]) + \det([a_1, a_2]) = \det([a_1, a_2])$$

Ορίζουσα μητρώου 2×2 (Ποιά είναι επιπέλους;;;)

Μπορούμε να την υπολογίσουμε βάσει των παραπάνω ιδιοτήτων:

$$\begin{aligned}\det([a_1, a_2]) &= \det([\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2, \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2]) \\ &= \alpha_{11}\det([e_1, \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2]) + \alpha_{21}\det([e_2, \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2]) \\ \\ &= \alpha_{11}\alpha_{12}\det([e_1, e_1]) + \alpha_{11}\alpha_{22}\det([e_1, e_2]) + \alpha_{21}\alpha_{12}\det([e_2, e_1]) + \alpha_{21}\alpha_{22}\det([e_2, e_2])\end{aligned}$$

$$\det([a_1, a_2]) = \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{21}\alpha_{12}\det([e_2, e_1]) = \alpha_{\mathbf{11}}\alpha_{\mathbf{22}} - \alpha_{\mathbf{21}}\alpha_{\mathbf{12}}$$

Προσοχή: πολλοί όροι μηδενίζονται (λόγω ((εκφυλισμού))).

- Όταν $n = 2$, αντί για $4 = 2^2$ όρους, έχουμε μόνον 2.
- με $n = 3$, αντί για $27 = 3^3$ όρους έχουμε 6 ...
- ... γενικά, αντί για n^n όρους, έχουμε $n!$.

Ανάπτυγμα Laplace

$$\det(A) = \alpha_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{1+2}\alpha_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n}\alpha_{1n}\det(A_{1n})$$

- Προσωρινός συμβολισμός Με $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ συμβολίζεται το μητρώο που προκύπτει αν διαγράψουμε από το A τη γραμμή i και τη στήλη j . Αποκαλείται **ελάσσον** (minor) του στοιχείου α_{ij} .
- Το $\psi_{i,j} := (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ λέγεται **συμπαράγοντας (cofactor)** του στοιχείου α_{ij} .
- Αν συμβολίσουμε με $\Psi = [\psi_{ij}]$ το μητρώο των συμπαράγοντων, τότε το ανάστροφό του Ψ^T , ονομάζεται **προσαρτημένο μητρώο (adjoint ή adjugate)** και συμβολίζεται $\text{adj}(A) = \Psi^T$.

Γενικά ισχύει ότι μπορούμε να εκφράσουμε την ορίζουσα ως προς οποιαδήποτε γραμμή (ή στήλη):

$$\det(A) = \alpha_{i,1}\psi_{i,1} + \alpha_{i,2}\psi_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,n}\psi_{i,n}$$

Προσοχή: Στον παραπάνω τύπο εκφράσαμε την ορίζουσα βάσει ορίζουσών μεγέθους $(n-1) \times (n-1)$.

Σύσταση: Στην εφαρμογή του τύπου, αξίζει να επιλέγουμε τη γραμμή ή στήλη με τα περισσότερα μηδενικά!

Τύπος για $n = 3$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} := \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

Άρα

$$\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

Προσέξτε:

$$\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

Μεγάλος τύπος ορίζουσας (Τύπος Leibniz)

Υπενθύμιση: Για μία μετάθεση π των στοιχείων $(1, \dots, n)$, δηλ. $(\pi(1), \dots, \pi(n))$, ορίζουμε ως **πρόσημο** της μετάθεσης, $\sigma(\pi)$, μία τιμή ± 1 . Η τιμή θα είναι $+1$ αν η μετάθεση π προέρχεται από άρτιο αριθμό εναλλαγών ή -1 αν προέρχεται από περιττό αριθμό εναλλαγών. Το αντίστοιχο μητρώο μετά-

θεσης P_π θα είναι εκείνο για το οποίο $P_\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(1) \\ \pi(2) \\ \vdots \\ \pi(n) \end{pmatrix}$. Παρατηρήστε ότι το P_π είναι μετάθεση

του ταυτοτικού, επομένως $\det(P_\pi) = \pm 1$. Η τιμή του συμπίπτει με το πρόσημο της μετάθεσης.

Μεγάλος τύπος (γιατί έχει $n!$ όρους)

$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}} \sigma(\pi) \alpha_{1\pi(1)} \cdots \alpha_{n\pi(n)}$ όπου $\mathcal{S}$ είναι το σύνολο των $n!$ μεταθέσεων των στοιχείων $(1, \dots, n)$ και $\sigma(\pi)$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης π .

Άλλες χρήσιμες ιδιότητες

Έστω ότι $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Το είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν $\det(A) \neq 0$.
- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ αν $\det(A) \neq 0$.
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(\gamma A) = \gamma^n \det(A)$ για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$

ΠΡΟΣΟΧΗ Η τέταρτη ιδιότητα αποκαλύπτει έναν τρόπο υπολογισμού του $\det(A)$ που έχει περίπου όσες πράξεις χρειάζεται η παραγοντοποίηση LU.

Πώς? Αν $A = PLU$ τότε

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(P) \underbrace{\det(L)}_{=1} \det(U) \\ &= (-1)^\kappa \det(U) = (-1)^\kappa v_{11} v_{22} \cdots v_{nn}.\end{aligned}$$

όπου κ είναι ο αριθμός των εναλλαγών που μετατρέπουν το I σε P. Το $(-1)^\kappa$ θα είναι το πρόσημο της αντίστοιχης μετάθεσης.

Κανόνας Cramer

και επίλυση γραμμικών συστημάτων

Αν $Ax = b$ τότε κάθε στοιχείο ξ_i του x μπορεί να υπολογιστεί με τον κανόνα Cramer:

Εύρεση συνιστωσών του διανύσματος λύσης

Έστω οι στήλες $a_1, \dots, a_n$ τ.ώ. $\det([a_1, \dots, a_n]) \neq 0$. Έστω επίσης ότι η λύση γράφεται ως $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$. Τότε για κάθε $j = 1, \dots, n$ ισχύει ότι

$$\xi_j = \frac{\det([a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n])}{\det([a_1, \dots, a_n])}$$

Εύρεση στοιχείων του αντιστρόφου

Αν το A είναι αντιστρέψιμο, τότε

$$(A^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{j,i})}{\det(A)} = \frac{\psi_{j,i}}{\det(A)}$$
$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} \text{ τύπος για το αντίστροφο}$$

- Ο υπολογισμός της ορίζουσας με τους παραπάνω τύπους είναι ακριβός
- ... εκτός αν την υπολογίσουμε μέσω LU
- ... οπότε δεν υπάρχει λόγος να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα
- ... γιατί από την LU βρίσκουμε τη λύση με μπρος και πίσω αντικατάσταση, πιο φθηνά!
- Εκτός αν το μητρώο έχει αξιοποιήσιμη δομή (π.χ. είναι κάτω τριγωνικό).

Ορίζουσες και τάξη μητρώου

Ένα μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ έχει τάξη ακριβώς r ανν και μόνον αν το μεγαλύτερο τετραγωνικό (υπο)μητρώο με μη μηδενική ορίζουσα είναι $r \times r$.

Ορίζουσες μητρώων με ειδική δομή

Παρατήρηση

Σε ορισμένες περιπτώσεις, η ορίζουσα μπορεί να υπολογιστεί πιο οικονομικά ή χωρίς καμία πράξη.

Τριγωνικά: Η ορίζουσα κάθε τριγωνικού μητρώου είναι ίση με το γινόμενο όλων των στοιχείων της διαγωνίου του.

Κατά πλοκάδες τριγωνικά Αν A, D τετραγωνικά μητρώα, τότε

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

Ειδική περίπτωση αν $\hat{A} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$,

$$\det \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0_{n-1,1} & \hat{A} & & \end{array} \right) = \det(\hat{A})$$

Προσοχή: Για γενικά μητρώα:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &\neq \det(A)\det(D) \text{ καθώς επίσης} \\ &\neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C) \end{aligned}$$

Ορίζουσες μητρώων με ειδική δομή (συνέχεια)

Μητρώο τάξης 1 Έστω ότι από τα διανύσματα (στήλες) u, v κατασκευάζουμε το μητρώο $A = uv^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα?

Απάντηση: 0 (γιατί?)

Μητρώο προβολής σε (γνήσιο) υπόχωρο?

Απάντηση: 0 (γιατί?)

Ορθογώνιο μητρώο?

Απάντηση: $\det(A) = \pm 1$ (γιατί?)

Ταυτοτικό συν μητρώο "τάξης-1" $A = I + uv^T$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα? Απάντηση:

$\det(A) = 1 + v^T u$. (γιατί?)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -v^T \\ u & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v^T \\ 0 & I + uv^T \end{pmatrix}, \text{ και } C = \begin{pmatrix} I & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & u \\ 0 & 1 + v^T u \end{pmatrix}$$

και αν $P = \begin{pmatrix} 0_{1,n} & 1 \\ I_n & 0_{n,1} \end{pmatrix}$ τότε $\det(P) = (-1)^{n+2}$ και $P^T B P = C$ άρα $\det(P^T B P) = \det(B) = \det(C)$. Από τις παραγοντοποιήσεις, $\det(I + uv^T) = 1 + v^T u$.

Γενίκευση και παράδειγμα

- Ταυτότητα Sylvester Γενικότερα ισχύει ότι αν $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\det(I_m + CD) = \det(I_n + DC)$$

- Συνιστάται να την αποδείξετε!

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε την ορίζουσα του

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Επίλυση: Παρατηρούμε ότι το μητρώο μπορεί να γραφτεί ως $A = 2I + 2ee^T$ όπου $e = (1, 1, 1, 1)^T$. Επομένως

$$\det(A) = \det(2(I + ee^T)) = 2^4 \det(I + ee^T) = 2^4(1 + e^T e) = 16 \cdot 5 = 80.$$

☺ Θα ήταν αρκετά πιο χρονοβόρο αν δουλεύατε απευθείας με το A .

Από τις ορίζουσες στις permanents

Για φανατικούς!

$$\text{perm}(A) := \sum_{\pi \in \mathcal{S}} \alpha_{1\pi(1)} \cdots \alpha_{n\pi(n)}$$

όπου $\mathcal{S}$ είναι το σύνολο των $n!$ μεταθέσεων των στοιχείων $(1, \dots, n)$.

- 1 Ενώ η ορίζουσα μπορεί να υπολογιστεί με $O(n^3)$ πράξεις, μέσω της παραγοντοποίησης LU, ο υπολογισμός της $\text{perm}(A)$ απαιτεί πολύ μεγάλο πλήθος πράξεων (μεγαλύτερο από πολυωνυμικό) καθώς αφορά την άθροιση εκθετικού πλήθους ακεραίων. Θυμηθείτε ότι $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (προσέγγιση Stirling).
- 2 Ο πιο γνωστός αλγόριθμος (Ryser) για τον ακριβή υπολογισμό απαιτεί $O(n2^n)$ πράξεις.
- 3 Έχει αποδειχθεί ότι ο υπολογισμός είναι #P-hard (sharp-P hard). Για μητρώα στο GF(2) (δηλ με στοιχεία $\{0, 1\}$) ο υπολογισμός είναι #P-complete.

Ερευνητικό πρόβλημα: Επινόηση γρήγορων αλγορίθμου για την αποτελεσματική προσέγγιση της permanent σε πολυωνυμικό χρόνο.

6. Το εξωτερικό γινόμενο

Αν $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ είναι η κανονική βάση στον $\mathbb{R}^3$ μπορούμε να γράψουμε, όπως συνηθίζεται στον Απειροστικό Λογισμό, ή στη Φυσική,

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_3.$$

Ορισμός 1

Αν

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, ορίζουμε το **εξωτερικό γινόμενο** των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, και το συμβολίζουμε με $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, το διάνυσμα

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \quad (1)$$

Από το ανάπτυγμα της ορίζουσας βλέπουμε αμέσως ότι μπορούμε να παραστήσουμε το εξωτερικό γινόμενο ως ορίζουσα στην ευκολομνημόνευτη μορφή

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Το εξωτερικό γινόμενο το λέμε και **σταυρωτό γινόμενο** (cross product), ή **διανυσματικό γινόμενο** (vector product).

Παρατήρηση 1

Από την (1) και τις ιδιότητες της ορίζουσας έπεται αμέσως ότι

- ❶ Αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- ❷ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
- ❸ $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Επίσης άμεση συνέπεια του ορισμού των διανυσμάτων $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ και του εξωτερικού γινομένου είναι το αποτέλεσμα

Πρόταση 1

Εάν, όπως ορίσαμε,

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

τότε

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Πρόταση 2

Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u} \quad \text{και} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v},$$

δηλαδή το $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{u}$ και στο $\mathbf{v}$, κατά συνέπεια είναι ορθογώνιο στο επίπεδο που παράγεται από τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ οποτεδήποτε τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη.

Δείχνουμε ότι $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$. Πράγματι από την (1) και τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

από τον ορισμό της ορίζουσας, συνεπώς $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$ αφού η ορίζουσα έχει δύο γραμμές ίσες. Η απόδειξη ότι $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$ είναι ανάλογη, ενώ από τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου έπεται ότι

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} + \mu (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. □

Εάν $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ παρατηρούμε ότι

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{vmatrix}$$

Ορισμός 2

Εάν $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ το $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ λέμε **τριπλό γινόμενο** (triple product) των $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$, έτσι

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{u}_3 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{w}_3 \end{vmatrix}.$$

Από τον ορισμό του τριπλού γινομένου απορρέει αμέσως ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, ισοδύναμα είναι συνεπίεδα, περιέχονται δηλαδή στο ίδιο επίπεδο, αν και μόνο αν

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Άσκηση 1

Το εξωτερικό γινόμενο προσδίδει στον $\mathbb{R}^3$ επιπλέον δομή.

- α) Εάν $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, και $\mathbf{c}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ δείξτε ότι

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad \text{και} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

ισχύει δηλαδή ο επιμεριστικός νόμος.

- β) Δείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το εξωτερικό γινόμενο, $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \times)$, είναι μια μη προσεταιριστική άλγεβρα, δηλαδή δεν ισχύει πάντα η ισότητα

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

- γ) Δείξτε ότι ικανοποιείται η **ταυτότητα του Jacobi**

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

για όλα τα διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, και $\mathbf{c}$.

7. Όγκος και ορίζουσα

Αν τρία διανύσματα δεν είναι συνεπίπεδα ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο στο $\mathbb{R}^3$. Το βαθμωτό μέγεθος $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ σχετίζεται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου. Ας δούμε κάποιες απλές περιπτώσεις.

- Αν $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1, \mathbf{v} = \mathbf{e}_2, \mathbf{w} = \mathbf{e}_3$, τότε

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{I}| = 1$$

όπου $\mathbf{I}$ είναι το ταυτοτικό μητρώο, και το $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ δίνει ακριβώς τον όγκο του μοναδιαίου κύβου.

- Αν λ, μ, ν είναι θετικές σταθερές και $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{e}_1, \mathbf{v} = \mu\mathbf{e}_2, \mathbf{w} = \nu\mathbf{e}_3$, τότε

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu$$

που και πάλι είναι ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα τρία διανύσματα.

Πρόταση 3

Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2, \quad (2)$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Απόδειξη.

Από την (1) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Πόρισμα 1

Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta,$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Απόδειξη.

Από την (2) και τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου υπολογίζουμε

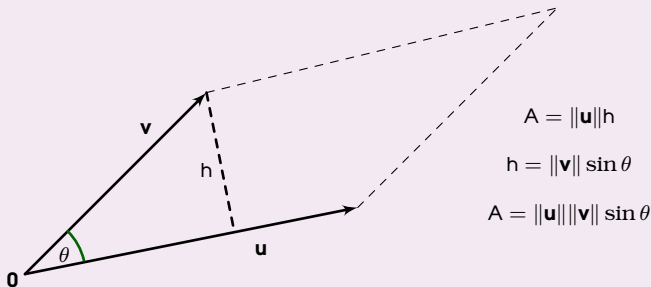
$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες αφού $\sin \theta \geq 0$. □

Παρατήρηση 2 (Εμβαδόν και εξωτερικό γινόμενο)

Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ και με $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ συμβολίσουμε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, τότε, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα,

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|. \quad (3)$$



Σχήμα: Εμβαδόν ορθογωνίου

Ορισμός 3

Θα λέμε ότι η τριάδα **$\mathbf{u-v-w}$** διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί ένα **θετικά προσανατολισμένο σύστημα** αν

$$\det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}) > 0.$$

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα **$\mathbf{u-v-w}$** έχει τον προσανατολισμό του τρισσορθογωνίου συστήματος **$\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$** .

Παρατήρηση 3

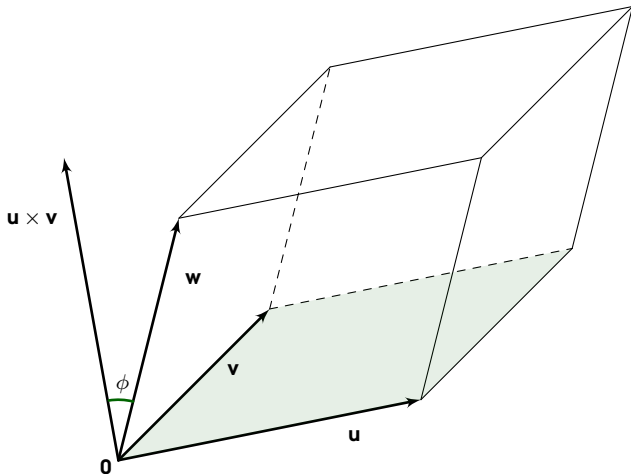
Αν τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε το σύστημα $\mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ είναι θετικά προσανατολισμένο.

Πράγματι γράφοντας $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (p_1 \ p_2 \ p_3)^T$ έχουμε

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & p_1 \\ u_2 & v_2 & p_2 \\ u_3 & v_3 & p_3 \end{vmatrix} \\ &= p_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - p_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + p_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2\end{aligned}$$

από την (1).

Έστω ότι το σύστημα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι θετικά προσανατολισμένο. Αν ϕ είναι η γωνία μεταξύ των $\mathbf{w}$ και $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, βλέπε Σχήμα, τότε $0 \leq \phi < \pi/2$ (γιατί?).



Σχήμα: Το παραλληλεπίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, και $\mathbf{w}$

Αν $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ είναι ο όγκος του θετικά προσανατολισμένου στερεού, τότε

$$\begin{aligned} V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \|\mathbf{w}\| \cos \phi \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \phi \\ &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \\ &= \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Επειδή $\det(\mathbf{v} \ \mathbf{u} \ \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w})$, αν το σύστημα $\mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{w}$ δεν είναι θετικά προσανατολισμένο, τότε το $\mathbf{v}-\mathbf{u}-\mathbf{w}$ είναι θετικά προσανατολισμένο και $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$. Δείξαμε λοιπόν το

Θεώρημα 1

Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε ο όγκος $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ του στερεού που παράγεται από τα τρία αυτά διανύσματα είναι

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w})|$$

ειδικά αν το σύστημα $\mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{w}$ είναι θετικά προσανατολισμένο, τότε $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w})$.