

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 9

Υπόχωροι παραγόμενοι από μητρώο Τάξη μητρώου Η δομή της λύσης συστήματος

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

2 Δεκεμβρίου 2025

1. Οι τέσσερις υπόχωροι παραγόμενοι από μητρώο

Αν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, το σύστημα

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

έχει λύση αν και μόνο αν υπάρχει $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ ώστε $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$, ισοδύναμα αν το $\mathbf{b}$ είναι η εικόνα κάποιου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ μέσω της απεικόνισης $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, η οποία ορίζεται με τη σχέση

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Κατά συνέπεια ένα $n \times m$ μητρώο μπορεί να ιδωθεί σαν μια απεικόνιση του $\mathbb{R}^m$ στο $\mathbb{R}^n$ επιπλέον από τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μητρώων έπεται ότι αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ τότε

$$T(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = A(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{y} = \lambda T(\mathbf{x}) + \mu T(\mathbf{y})$$

δηλαδή η απεικόνιση είναι γραμμική. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ σημαντικό, όπως θα δούμε, για την επίλυση συστημάτων.

Θυμίζουμε ότι το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση αν και μόνον αν το $\mathbf{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A , ισοδύναμα, σε σχέση με την απεικόνιση T , αν το $\mathbf{b}$ είναι η εικόνα κάποιου $\mathbf{x}$ μέσω της T , δηλαδή το $\mathbf{b}$ περιέχεται στο πεδίο τιμών της T . Έτσι σε αναλογία με τις συναρτήσεις έχουμε

Ορισμός 1

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο ορίζουμε

- 1 Την **εικόνα** (range) του A

$$\text{range } A = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}.$$

- 2 Τον **μηδενόχωρο** (null space) του A

$$\text{null } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

■ Παρατηρούμε ότι $\text{range } A \subseteq \mathbb{R}^n$ και ότι ένα διάνυσμα $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ περιέχεται στο $\text{range } A$ αν και μόνον αν υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ώστε $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, ισοδύναμα

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}_1 x_1 + \mathbf{c}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{c}_m x_m$$

όπου με $\mathbf{c}_j$ συμβολίζουμε τις στήλες του A . Κατά συνέπεια

$$\text{range } A = \text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m\}.$$

Επειδή κάθε διάνυσμα διανυσμάτων είναι διανυσματικός υπόχωρος έπεται ότι $\text{range } A$ **είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$** .

Ορισμός 2

Τον υπόχωρο $\text{range } A$ λέμε και **χώρο στηλών** (column space) του A και ενίοτε συμβολίζουμε με $C(A)$.

Σημειώνουμε ότι η διάστασή του είναι το πολύ n , δηλαδή $\dim(\text{range } A) \leq n$.

■ Όμοια $\text{null } A$ **είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$** . Πράγματι αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα του $\text{null } A$, και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$A(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{u} + \mu A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{0} + \mu \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

κατά συνέπεια $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in \text{null } A$, ισοδύναμα το $\text{null } A$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

Παρατήρηση 1

Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3, Διάλεξη 5, είναι ότι αν το A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο τότε οι ισχυρισμοί

- 1 Το A είναι αντιστρέψιμο.
- 2 $\text{null } A = \{\mathbf{0}\}$.

είναι ισοδύναμοι.

Παρατήρηση 2

Όμοια, για το $n \times m$ μητρώο A το

$$\text{range } A^T = \{A^T \mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\} = C(A^T)$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και παράγεται από τις στήλες του A^T , ισοδύναμα από τις γραμμές του A . Για τον λόγο αυτό τον υπόχωρο $\text{range } A^T$ λέμε και **χώρο γραμμών** (row space) του A και συμβολίζουμε με $R(A)$. Επίσης τον διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$

$$\text{null } A^T = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}\},$$

λέμε **αριστερό μηδενόχωρο** του A , αφού αν $\mathbf{y} \in \text{null } A^T$, τότε

$$\mathbf{y}^T A = (A^T \mathbf{y})^T = \mathbf{0}^T.$$

Στη συνέχεια μέσω παραδειγμάτων παρουσιάζουμε ένα συστηματικό τρόπο εύρεσης των τεσσάρων υποχώρων μητρώου.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο χώρος στηλών και ο μηδενόχωρος του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ο χώρος στηλών $\text{range } A$ ή $C(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ κατά συνέπεια παράγεται από το πολύ τρεις στήλες του A , επομένως οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επειδή η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R_0 αναδεικνύει τη δομή του A αναζητάμε την (ακμ) R_0 του A .

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Αν με $\mathbf{c}_j$ και $\mathbf{c}'_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ συμβολίσουμε τις στήλες του A και R_0 αντίστοιχα, βλέπουμε ότι οι $\mathbf{c}'_1$ και $\mathbf{c}'_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες ενώ

$$\mathbf{c}'_3 = -\mathbf{c}'_1 + 3\mathbf{c}'_2, \quad \text{και} \quad \mathbf{c}'_4 = \mathbf{c}'_1 + \mathbf{c}'_2. \quad (1)$$

Αν L είναι το μητρώο ώστε $LA = R_0$, παίρνουμε

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 + x_4\mathbf{c}_4 = \mathbf{b}$$

$$LA\mathbf{x} = L(x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 + x_4\mathbf{c}_4) = L\mathbf{b}$$

$$x_1L\mathbf{c}_1 + x_2L\mathbf{c}_2 + x_3L\mathbf{c}_3 + x_4L\mathbf{c}_4 = L\mathbf{b} \quad (\text{από γραμμικότητα})$$

$$R_0\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}'_1 + x_2\mathbf{c}'_2 + x_3\mathbf{c}'_3 + x_4\mathbf{c}'_4 = L\mathbf{b} \quad (L\mathbf{c}_j = \mathbf{c}'_j)$$

$$(x_1 - x_3 + x_4)\mathbf{c}'_1 + (x_2 + 3x_3 + x_4)\mathbf{c}'_2 = L\mathbf{b} \quad (\text{από την (1)})$$

$$L^{-1}((x_1 - x_3 + x_4)\mathbf{c}'_1 + (x_2 + 3x_3 + x_4)\mathbf{c}'_2) = L^{-1}L\mathbf{b}$$

$$(x_1 - x_3 + x_4)L^{-1}\mathbf{c}'_1 + (x_2 + 3x_3 + x_4)L^{-1}\mathbf{c}'_2 = \mathbf{b}$$

$$(x_1 - x_3 + x_4)\mathbf{c}_1 + (x_2 + 3x_3 + x_4)\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} \quad (L^{-1}\mathbf{c}'_j = \mathbf{c}_j).$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Κατά συνέπεια μια βάση για τον χώρο στηλών $C(A)$ ή $\text{range } A$ αποτελούν οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A $\mathbf{c}_1$ και $\mathbf{c}_2$, όπως και του R_0 , έτσι

$$\text{range } A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = C(A).$$

Αναζητώντας στη συνέχεια μια βάση για τον $\text{null } A$, θεωρούμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, δηλαδή παίρνουμε $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Τότε

$$x_1 - x_3 + x_4 = 0 \quad \text{και} \quad x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

οπότε

$$x_1 = x_3 - x_4 \quad \text{και} \quad x_2 = -3x_3 - x_4$$

και η λύση του συστήματος είναι

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ -3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\text{null } A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αφού τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Σημειώνουμε ότι το τελευταίο αποτέλεσμα μπορούμε να το πάρουμε από τις ισοδυναμίες

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow L A \mathbf{x} = L \mathbf{0} \Leftrightarrow R_0 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί ο χώρος γραμμών και ο αριστερός μηδενόχωρος του μητρώου A του Παραδείγματος 1.

Πρώτη προσέγγιση. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που ακολουθήθηκε στο Παράδειγμα (7.1) αλλά τώρα για το μητρώο A^T . Έτσι βρίσκουμε

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R'_0.$$

Δύο από τις τρεις στήλες του R'_0 είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έτσι επιλέγοντας την πρώτη και την δεύτερη παίρνουμε

$$\text{range } A^T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = C(A^T) = R(A).$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

Για τον αριστερό μηδενόχωρο του A λύνουμε το σύστημα $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$, ισοδύναμα

$$R'_0 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

κατά συνέπεια

$$\text{null } A^T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Δεύτερη προσέγγιση. Σε κάθε βήμα της απαλοιφής μια γραμμή προκύπτει από τη πρόσθεση σε αυτή πολλαπλασίου άλλης γραμμής, συνεπώς κάθε γραμμή του R_0 είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A , και αντιστρόφως. Αν με $\mathbf{r}_j$ και $\mathbf{r}'_j$, $j = 1, 2, 3$ συμβολίσουμε τις γραμμές του A και R_0 αντίστοιχα, βλέπουμε ότι

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2,$$

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_2,$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1,$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

κατά συνέπεια $\text{range } A^T = \text{span}\{\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2\} = \text{span}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\} = R(A)$, ή

$$\text{range } A^T = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = R(A).$$

Το μητρώο L που αναγάγει το A στο R_0 είναι το

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(γιατί;). Από την σχέση $LA = R_0$ παρατηρούμε ότι η τελευταία γραμμή του L είναι εκείνη που συνδυάζει τις γραμμές του A και δίνει την μηδενική γραμμή, τρίτη γραμμή, του R_0 , έτσι η τελευταία γραμμή του L αποτελεί μια βάση του αριστερού μηδενόχωρου $\text{null } A^T$.

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

Πράγματι

$$(LA)^T = A^T L^T = R_0^T \Leftrightarrow \left(A^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

επομένως

$$\text{null } A^T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

όπως βρήκαμε με την πρώτη προσέγγιση.

2. Τάξη μητρώου

Αν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο τότε οι οδηγοί του A καθορίζουν τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες και τις γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές του A . Συγκεκριμένα οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A και οι γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές του A είναι αντίστοιχα οι στήλες που περιέχουν τους οδηγούς και οι γραμμές που περιέχουν τους οδηγούς, κατά συνέπεια

$\#$ των γρ. ανεξαρτήτων στηλών του $A = \#$ των γρ. ανεξαρτήτων γραμμών του A

Ορισμός 3

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο ορίζουμε την **τάξη** (rank) του A να είναι το πλήθος των οδηγών του A . Συμβολίζουμε την τάξη του A με $\text{rank } A$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι ότι αν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε

$$\text{rank } A \leq \min\{n, m\}. \quad (2)$$

$$\text{rank } A = \dim C(A) = \dim(\text{range } A). \quad (3)$$

$$\text{rank } A = \dim R(A) = \dim(\text{range } A^T). \quad (4)$$

Θεώρημα 1 (Θεμελιώδες Θεώρημα, μέρος 1)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο τάξης r , τότε

- 1 $\dim(\text{null } A) = m - r.$
- 2 $\dim(\text{null } A^T) = n - r.$

Από το Θεώρημα (ΘΘ1) και την (4) έπεται ότι

$$\dim(\text{null } A) + \dim(\text{range } A^T) = m - r + r = m = \dim \mathbb{R}^m,$$

και επειδή οι $\text{null } A$ και $\text{range } A^T$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι $\text{null } A + \text{range } A^T = \mathbb{R}^m$. Στην πραγματικότητα ισχύει το ισχυρότερο αποτέλεσμα

Θεώρημα 2 (Θεμελιώδες Θεώρημα, μέρος 2)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε

- 1 $\mathbb{R}^m = \text{null } A \oplus \text{range } A^T,$
- 2 $\mathbb{R}^n = \text{null } A^T \oplus \text{range } A.$

Στο Θεμελιώδες Θεώρημα αποδείξαμε ότι εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε

$$\mathbb{R}^m = \text{null } A \oplus \text{range } A^T, \quad \text{και} \quad \mathbb{R}^n = \text{null } A^T \oplus \text{range } A,$$

ενώ από το Θεώρημα για το ορθογώνιο συμπλήρωμα έπεται ότι

$$\mathbb{R}^m = \text{null } A \oplus (\text{null } A)^\perp, \quad \text{και} \quad \mathbb{R}^n = (\text{range } A)^\perp \oplus \text{range } A.$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το επιπλέον αποτέλεσμα

Θεώρημα 3 (Θεμελιώδες Θεώρημα, μέρος 3)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε

- ❶ $(\text{null } A)^\perp = \text{range } A^T,$
- ❷ $(\text{range } A)^\perp = \text{null } A^T.$

Απόδειξη.

(1) Αν $\mathbf{x} \in (\text{null } A)^\perp$, επειδή $\mathbb{R}^m = \text{null } A \oplus \text{range } A^T$, έπεται ότι $\mathbf{x} \in \text{range } A^T$, οπότε $(\text{null } A)^\perp \subseteq \text{range } A^T$. Δείχνουμε ότι $\text{range } A^T \subseteq (\text{null } A)^\perp$. Αν $\mathbf{x} \in \text{range } A^T$, με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{x} = A^T \mathbf{y}$, για κάποιο $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, και

$$0 < \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle A^T \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = (A^T \mathbf{y})^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T A \mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, A \mathbf{x} \rangle$$

επομένως $A \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, συνεπώς $\mathbf{x} \notin \text{null } A$, άρα $\mathbf{x} \in (\text{null } A)^\perp$, γεγονός που συμπληρώνει την απόδειξη του (1). Για το (2) παρατηρούμε ότι με A^T στη θέση του A από το (1) έχουμε $(\text{null } A^T)^\perp = \text{range } A$, έτσι

$$((\text{null } A^T)^\perp)^\perp = (\text{range } A)^\perp \Leftrightarrow \text{null } A^T = (\text{range } A)^\perp.$$

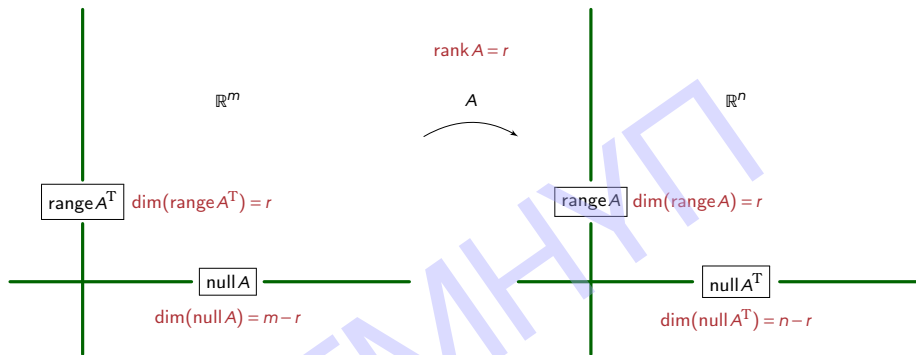


Σημειώνουμε ότι εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\langle A \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^T \mathbf{y} \rangle,$$

όπου το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στα αριστερά είναι το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$ και στα δεξιά το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^m$.

Κωδικοποιημένα μπορούμε να αποτυπώσουμε αυτές τις σχέσεις στο Σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα: Οι τέσσερις υπόχωροι που παράγονται από μητρώο A διαστάσεων $n \times m$.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

3. Η δομή της λύσης συστήματος

Ας θεωρήσουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου A είναι ένα $n \times m$ μητρώο. Εάν r είναι η τάξη του μητρώου, $r = \text{rank } A$, και $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_{m-r}^0\}$ είναι μια βάση για τον μηδενόχωρο, $\text{null } A$, του A , τότε κάθε λύση του ομοιογενούς συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι της μορφής

$$c_1 \mathbf{x}_1^0 + \dots + c_{m-r} \mathbf{x}_{m-r}^0. \quad (5)$$

Ονομάζουμε την (5) **γενική λύση του ομοιογενούς συστήματος**. Ο χαρακτηρισμός γενική λύση δικαιολογείται από το γεγονός ότι αν $\mathbf{x}'$ είναι μια λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, τότε η $\mathbf{x}'$ προκύπτει από την (5) με κατάλληλη επιλογή των c_k . Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $\mathbf{x}_p$ είναι μια λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, μια όπως λέμε **ειδική λύση** (particular solution). Αν $\mathbf{x}$ είναι μια επίσης λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, τότε η $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ είναι λύση του ομοιογενούς προβλήματος. Πράγματι

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

κατά συνέπεια υπάρχουν σταθερές $c_1, \dots, c_{m-r}$ ώστε

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_p = c_1 \mathbf{x}_1^0 + \dots + c_{m-r} \mathbf{x}_{m-r}^0 = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p.$$

Αποδείξαμε λοιπόν το ακόλουθο

Θεώρημα 4

Εάν $\mathbf{x}_p$ είναι μια **ειδική** λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, τότε η **γενική** λύση του συστήματος είναι της μορφής

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p,$$

όπου $\mathbf{x}_0$ είναι η γενική λύση του ομοιογενούς συστήματος.

Παράδειγμα 3

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια το $\mathbf{x}_p = (4 \ -5 \ 1 \ 1)^T$ είναι μια **ειδική λύση** για το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου A είναι το μητρώο στο αριστερό μέρος του γινομένου, με $\mathbf{b} = (3 \ 4 \ 7)^T$.

Παράδειγμα 3 (συνέχεια)

Είδαμε στο Παράδειγμα 2 ότι μια βάση για τον μηδενόχωρο του A είναι η

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα (7.1), η **γενική λύση** του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

όπου c_1, c_2 είναι πραγματικές παράμετροι.

Για επιβεβαίωση από το επαυξημένο μητρώο $(A \ \mathbf{b})$ του συστήματος παίρνουμε

Παράδειγμα 3 (συνέχεια)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

οπότε το ισοδύναμο σύστημα είναι

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + x_3 - x_4 \\ x_2 = -1 - 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

Έτσι η λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + x_3 - x_4 \\ -1 - 3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια)

Διατυπώνεται το ερώτημα κατά πόσον οι (6) και (7) συμφωνούν. Παρατηρούμε ότι για $x_3 = \lambda + 1$ και $x_4 = \mu + 1$ έχουμε

$$(\lambda + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mu + 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια οι δύο λύσεις είναι ισοδύναμες, και αυτό ακριβώς το αποτέλεσμα δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό μιας τέτοιας λύσης ως γενική. Ειδικά η $\mathbf{x}_p = (4 \ -5 \ 1 \ 1)^T$ προκύπτει από την (7) για $x_3 = x_4 = 1$.

Παρατήρηση 3

Εάν A και B είναι μητρώα συμβατών διαστάσεων ώστε να ορίζεται το AB δημιουργείται το ερώτημα εάν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των τάξεων των A , B και AB . Ας δούμε σαν παράδειγμα μια απλή περίπτωση, όπου τα A και B είναι 2×2 μητρώα. Υπολογίζοντας ή για την ακρίβεια γράφοντας

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

βλέπουμε ότι

- αν οι γραμμές του A είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε και οι γραμμές του AB είναι γραμμικά εξαρτημένες, ή
- αν οι στήλες του B είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε και οι στήλες του AB είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Κατά συνέπεια $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$.

Παράδειγμα 4

Αν $A = QS$, όπου

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } Q = \text{rank } S = 2$$

το A είναι 3×3 , αλλά $\text{rank } A \leq 2$. Πράγματι

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} (-1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \\ &= \begin{pmatrix} (1 \ -1 \ 2)2 + (3 \ 0 \ 1)1 \\ (1 \ -1 \ 2)3 + (3 \ 0 \ 1)(-2) \\ (1 \ -1 \ 2)1 + (3 \ 0 \ 1)0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Οι στήλες του A (γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του Q), ή οι γραμμές του A (γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του S) παράγονται από δύο διανύσματα.

Παράδειγμα 4 (συνέχεια)

Επομένως για τον χώρο στηλών του A έχουμε

$$C(A) = \text{range } A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

και για τον χώρο γραμμών του A

$$R(A) = \text{range } A^T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Έτσι $\text{rank } A = 2$, γεγονός που περιμέναμε αφού

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{και} \quad \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα έπεται ότι $\dim(\text{null } A) = 3 - 2 = 1$.

Παράδειγμα 4 (συνέχεια)

Επειδή $\text{rank } Q = 2 = \text{rank } S$ έχουμε ότι $Ax = 0 \Leftrightarrow Sx = 0$, ή

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Με απαλοιφή βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Έτσι η λύση της (8) είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_3 \\ \frac{5}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 4 (συνέχεια)

επομένως

$$\text{null } A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Για την εύρεση του αριστερού μηδενόχωρου του A , από την $A = QS$ παίρνουμε $A^T = S^T Q^T$, και όπως πριν αφού $\text{rank } Q = 2 = \text{rank } S$ έχουμε $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow Q^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Και πάλι με απαλοιφή βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Η λύση λοιπόν της $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7}x_3 \\ -\frac{1}{7}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{x_3}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

επομένως

Παράδειγμα 4 (συνέχεια)

$$\text{null } A^T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}.$$

Μητρώα τάξης ένα. Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα, ας πούμε στο $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\mathbf{v}^T &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 \mathbf{u} & v_2 \mathbf{u} & v_3 \mathbf{u} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 \mathbf{v}^T \\ u_2 \mathbf{v}^T \\ u_3 \mathbf{v}^T \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

δηλαδή $\text{rank } \mathbf{u}\mathbf{v}^T = 1$. Όμοια αν $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, τότε το μητρώο $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ έχει τάξη ένα. Το αυτό ισχύει και για το μητρώο $\mathbf{v}\mathbf{u}^T$. Δείξτε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν το $n \times m$ μητρώο A είναι τάξης ένα, τότε υπάρχουν διανύσματα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ ώστε $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

Χάριν πληρότητας αναφέρουμε επίσης ότι

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} (w \ x) + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} (y \ z). \quad (9)$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε μητρώο στο δεξί μέλος της (9) είναι τάξης ένα. Τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν προφανώς για γινόμενα μητρώων γενικότερων συμβατών διαστάσεων. Έτσι αν το $A = (a_{ij})$ είναι ένα $n \times m$ μητρώο, το $B = (b_{ij})$ είναι ένα $m \times k$ μητρώο και για το τυπικό μητρώο $M \in \mathbb{M}^{n,m}$ με M_{i*} συμβολίσουμε, ως συνήθως, την i -γραμμή του M , ως διάνυσμα-στήλη, και με M_{*j} την j -στήλη του M , έχουμε

$$\begin{aligned} (AB)_{*j} &= b_{1j}A_{*1} + b_{2j}A_{*2} + \cdots + b_{mj}A_{*m}, & j &= 1, 2, \dots, k \\ (AB)_{i*} &= a_{i1}B_{1*} + a_{i2}B_{2*} + \cdots + a_{im}B_{m*}, & i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Η γενίκευση της (9) είναι

$$AB = A_{*1}B_{1*}^T + A_{*2}B_{2*}^T + \cdots + A_{*m}B_{m*}^T$$

από την οποία έπεται ότι το γινόμενο δύο μητρώων διασπάται σε ένα άθροισμα μητρώων τάξης ένα.