

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 7

Ευθύ άθροισμα

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο Ορθογώνιο συμπλήρωμα

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

18 Νοεμβρίου 2025

1. Ευθύ άθροισμα υποχώρων

Εάν X είναι ένας διανυσματικός χώρος και V, W είναι υπόχωροι του X ορίζουμε το **άθροισμα** των υποχώρων V και W

$$V + W = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} : \mathbf{v} \in V \text{ και } \mathbf{w} \in W\}.$$

Παρατηρούμε ότι $V + W \subseteq X$, επιπλέον δείχνουμε ότι το $V + W$ είναι υπόχωρος του X . Πράγματι αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V + W$, τότε $\mathbf{a} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ και $\mathbf{b} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$ για κάποια $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ και $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, και για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} &= \lambda \mathbf{v} + \lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{v}' + \mu \mathbf{w}' \\ &= (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}') + (\lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{w}') \\ &= \mathbf{v}'' + \mathbf{w}''\end{aligned}$$

με $\mathbf{v}'' = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}' \in V$ και $\mathbf{w}'' = \lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{w}' \in W$, οπότε $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \in V + W$, κατά συνέπεια το $V + W$ είναι υπόχωρος του X .

Έστω ότι V και W είναι υπόχωροι του X , και έστω ότι $X = V + W$. Αν $\mathbf{x} \in X$ και $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, με $\mathbf{v} \in V$ και $\mathbf{w} \in W$, τότε για $\mathbf{u} \in V \cap W$ ισχύει επίσης ότι $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w} - \mathbf{u}$, με $\mathbf{v} + \mathbf{u} \in V$ και $\mathbf{w} - \mathbf{u} \in W$, δηλαδή η αναπαράσταση ενός διανύσματος του X ως άθροισμα ενός διανύσματος του V και ενός του W δεν είναι μοναδική. Αν όμως $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$, τότε μια τέτοια αναπαράσταση είναι μοναδική. Πράγματι αν $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$ με $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ και $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - (\mathbf{v}' + \mathbf{w}') \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (\mathbf{w} - \mathbf{w}') \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w}' - \mathbf{w}\end{aligned}$$

οπότε $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in V \cap W$ και $\mathbf{w}' - \mathbf{w} \in V \cap W$, έτσι από την υπόθεση έπεται ότι $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{0}$ και $\mathbf{w}' - \mathbf{w} = \mathbf{0}$, δηλαδή $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ και $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$.

Ορισμός 1

Αν V και W είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου X , θα λέμε ότι ο X είναι **ευθύ άθροισμα** (direct sum) των V και W εάν

$$X = V + W \quad \text{και} \quad V \cap W = \{\mathbf{0}\}$$

Εάν ο X είναι ευθύ άθροισμα των V και W γράφουμε $X = V \oplus W$.

Το Θεώρημα επέκτασης της βάσης υπόχωρου (Θ.8, διάλεξη 7) μπορεί να διατυπωθεί και ως

Θεώρημα 1

Εάν ο X είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και V είναι ένας υπόχωρος του X , τότε υπάρχει υπόχωρος W του X ώστε $X = V \oplus W$.

Άσκηση 1

Έστω

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Δείξτε ότι

- 1 Το V με τις πράξεις του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.
- 2 $\dim V = 2$.
- 3 Να βρεθεί υπόχωρος W του $\mathbb{R}^3$, ώστε $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.
- 4 Ποια είναι η διάσταση του W ($\dim W = ;$);
- 5 Είναι ο W ο μοναδικός υπόχωρος για τον οποίο $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

2. Εσωτερικό γινόμενο

Εάν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ το γινόμενο $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ ορίζεται ως γινόμενο μητρώων και

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Το γινόμενο αυτό το γνωρίζουμε ως το **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, και το συμβολίζουμε με $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, ή $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Ορισμός 2

Εάν X είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος μια πραγματική συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) εάν:

- 1 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ και $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- 2 $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$.
- 3 $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 4 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$.

Ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ συμβολίζεται και ως $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Λέγεται, έτσι, και **στικτό γινόμενο** (dot product), ή **βαθμωτό γινόμενο** (scalar product).

Παρατηρούμε ότι εάν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} \rangle &= \langle \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && \text{(από την (4))} \\ &= \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \mu \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && \text{(από τις (2) και (3))} \\ &= \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle && \text{(από την (4)).}\end{aligned}$$

Ορισμός 3

Ένας διανυσματικός χώρος X στον οποίο έχει οριστεί ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ λέγεται **χώρος με εσωτερικό γινόμενο** και γράφουμε $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Παράδειγμα 1 (Το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο)

Ο $\mathbb{R}^n$ με $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

- ❶ $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$ και $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- ❷ $(\mathbf{u} + \mathbf{v})^T \mathbf{w} = (\mathbf{u}^T + \mathbf{v}^T) \mathbf{w} = \mathbf{u}^T \mathbf{w} + \mathbf{v}^T \mathbf{w}$.
- ❸ $(\lambda \mathbf{u})^T \mathbf{v} = \lambda u_1 v_1 + \lambda u_2 v_2 + \cdots + \lambda u_n v_n = \lambda (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n) = \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{v}$.
- ❹ $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$ λόγω μεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$.

Κατά συνέπεια η σχέση $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 1

Εάν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο και το B ένα $m \times k$ μητρώο, με το γνωστό συμβολισμό για τις γραμμές και τις στήλες, από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μητρώων έπεται ότι

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1*}^T B_{*1} & A_{1*}^T B_{*2} & \cdots & A_{1*}^T B_{*k} \\ A_{2*}^T B_{*1} & A_{2*}^T B_{*2} & \cdots & A_{2*}^T B_{*k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n*}^T B_{*1} & A_{n*}^T B_{*2} & \cdots & A_{n*}^T B_{*k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A_{1*}, B_{*1} \rangle & \langle A_{1*}, B_{*2} \rangle & \cdots & \langle A_{1*}, B_{*k} \rangle \\ \langle A_{2*}, B_{*1} \rangle & \langle A_{2*}, B_{*2} \rangle & \cdots & \langle A_{2*}, B_{*k} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle A_{n*}, B_{*1} \rangle & \langle A_{n*}, B_{*2} \rangle & \cdots & \langle A_{n*}, B_{*k} \rangle \end{pmatrix},$$

έτσι

$$AB = (A_{i*} \cdot B_{*j}) = (\langle A_{i*}, B_{*j} \rangle) = (A_{i*}^T B_{*j})$$

με $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 1, 2, \dots, k$.

Άσκηση 2

- 1 Δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3. \quad (1)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$.

- 2 Δείξτε ότι

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}. \quad (2)$$

Άσκηση 3

Εάν A είναι ένα αντιστρέψιμο 3×3 μητρώο, δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}, \quad (3)$$

όπου “ $\cdot$ ” είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$. Σημειώνουμε ότι

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^T A\mathbf{v} = \mathbf{u}^T A^T A\mathbf{v}.$$

Παρατήρηση 2

Υπό το πρίσμα του αποτελέσματος της Άσκησης 3 βλέπουμε ότι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$ υλοποιείται και ως

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{I} \mathbf{u} \cdot \mathbf{I} \mathbf{v}$$

όπου $\mathbf{I}$ είναι το 3×3 ταυτοτικό μητρώο. Επιπλέον το εσωτερικό γινόμενο στην Άσκηση 2 δίνεται από τη σχέση (3) με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Τα αποτελέσματα των Ασκήσεων 2 και 3 γενικεύονται και ισχύουν στον $\mathbb{R}^n$. Ειδικά αν A είναι ένα αντιστρέψιμο $n \times n$ μητρώο, τότε η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A^T A \mathbf{v}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$.

Άσκηση 4

Εάν p και q είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ δύο με $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ και $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ ορίζουμε

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Δείξτε ότι η σχέση αυτή είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{P}_2$.

Παράδειγμα 2

Στο χώρο $\mathcal{C}[a, b]$ των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$ η σχέση

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (4)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι αν $f, g, h \in \mathcal{C}[a, b]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$$

από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος αφού $f^2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

Επιπλέον από τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων και του ολοκληρώματος έπεται ότι

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx = 0 \stackrel{*}{\Leftrightarrow} f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow f = 0.$$

* Αν η h είναι συνεχής στο $[a, b]$, $h(x) \geq 0$ και $\int_a^b h(x) dx = 0$, τότε $h(x) = 0$ στο $[a, b]$.

- Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος

$$\begin{aligned}\langle f + g, h \rangle &= \int_a^b (f(x) + g(x))h(x) dx = \int_a^b (f(x)h(x) + g(x)h(x)) dx \\ &= \int_a^b f(x)h(x) dx + \int_a^b g(x)h(x) dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle.\end{aligned}$$



$$\langle \lambda f, g \rangle = \int_a^b \lambda f(x)g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x)g(x) dx = \lambda \langle f, g \rangle.$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

- Τέλος

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle.$$

Κατά συνέπεια η (4) ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathcal{C}[a, b]$.

Ορισμός 4

Έστω ότι X είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του X είναι **ορθογώνια** (orthogonal) ή **κάθετα** (perpendicular) μεταξύ τους αν $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι ορθογώνια γράφουμε $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbf{u} = (1 \ 2 \ 3)^T$ και $\mathbf{v} = (-2 \ 1 \ 0)^T$, τότε

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(-2) + (2)(1) + (3)(0) = -2 + 2 = 0,$$

επομένως τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Παράδειγμα 3

Ας συμβολίσουμε με $\mathbb{P}_n[-1, 1]$ τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού έως n περιορισμένων στο διάστημα $[-1, 1]$. Μια βάση για τον χώρο αυτό είναι η $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Παρατηρούμε ότι

$$\langle x^i, x^j \rangle = \int_{-1}^1 x^i x^j dx = \frac{1}{i+j+1} x^{i+j+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{i+j+1} [1 - (-1)^{i+j+1}]$$

$i, j = 0, 1, \dots, n$ ($x^0 = 1$). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\langle x^i, x^j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{αν } i+j \text{ είναι περιπτός} \\ \frac{2}{i+j+1} & \text{αν } i+j \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$$

Έτσι αν $i+j$ είναι περιπτός αριθμός, τότε τα x^i και x^j είναι ορθογώνια μεταξύ τους στο διάστημα $[-1, 1]$.

Στην περίπτωση μιγαδικού διανυσματικού χώρου, δηλαδή ενός διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών, έχουμε

Ορισμός 5

Εάν X είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ θα λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) εάν ισχύουν τα παρακάτω:

- ❶ $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ και $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- ❷ $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$.
- ❸ $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ❹ $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$.

Όπου στην (4) με $\bar{z}$ συμβολίζουμε τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού z .

Παρατηρούμε ότι εάν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ και $\zeta, \xi \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \zeta \mathbf{v} + \xi \mathbf{w} \rangle &= \overline{\langle \zeta \mathbf{v} + \xi \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} && \text{(από την (4))} \\ &= \overline{\zeta \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \xi \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} && \text{(από τις (2) και (3))} \\ &= \bar{\zeta} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \bar{\xi} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle && \text{(από την (4)).}\end{aligned}$$

Άσκηση 5

Αν $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^T$ και $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^T$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{C}^n$ δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \dots + a_n \overline{b_n}$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

3. Νόρμα διανύσματος

Ορισμός 6

Εάν X είναι ένας διανυσματικός χώρος μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **νόρμα** (norm) εάν για κάθε $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ στο X ικανοποιούνται οι σχέσεις

- ❶ $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{u}\| = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- ❷ $\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$).
- ❸ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Για $\mathbf{u} \in X$ ο (μη αρνητικός) πραγματικός αριθμός $\|\mathbf{u}\|$ λέγεται νόρμα του $\mathbf{u}$.

Η ιδιότητα (3) είναι η **τριγωνική ανισότητα**.

Παράδειγμα 4

Το μέτρο του $\mathbf{u} = (u_1 \dots u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ είναι νόρμα. Οι ιδιότητες (1) και (2) έπονται από την

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

όπου $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Για την (3) υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται η (3) παίρνοντας ρίζες. Τη νόρμα (μέτρο) του $\mathbf{a} = (a_1 \dots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ τη λέμε **ℓ_2 -νόρμα** στο $\mathbb{R}^n$ και τη συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$, έτσι

$$\|\mathbf{a}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Παράδειγμα 5

Αν $\mathbf{a} = (a_1 \dots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\|\mathbf{a}\| = \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα. Πράγματι $\|\mathbf{a}\| \geq 0$, σαν άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων, ενώ $\|\mathbf{a}\| = 0$ αν και μόνο αν $|a_k| = 0$, για όλα τα k , άρα ο νόμος (1) στον ορισμό της νόρμας ικανοποιείται. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\|\lambda \mathbf{a}\| = \sum_{k=1}^n |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |a_k|$$

από την οποία προκύπτει η (2). Η (3), η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας της απόλυτης τιμής

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Τη νόρμα αυτή λέμε **ℓ_1 -νόρμα** στο $\mathbb{R}^n$ και τη συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_1$.

Παράδειγμα 6

Αν $\mathbf{a} = (a_1 \ \dots \ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\|\mathbf{a}\| = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Οι συνθήκες (1) και (2) του ορισμού της νόρμας ικανοποιούνται η δε (3), η τριγωνική ανισότητα, έπεται από το γεγονός ότι για $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} |a_k + b_k| &\leq |a_k| + |b_k| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |b_k|, \end{aligned}$$

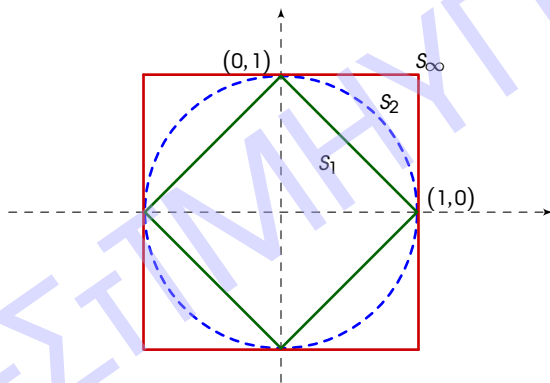
επομένως

$$\max_{1 \leq k \leq n} |a_k + b_k| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |b_k|.$$

Η $\|\cdot\|$ λοιπόν είναι νόρμα. Συνήθως τη συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_\infty$ και τη λέμε **maximum-νόρμα** ή **ℓ_∞ -νόρμα** στο $\mathbb{R}^n$.

Οι μοναδιαίες (ως προς τις τρεις διαφορετικές νόρμες) σφαίρες στο $\mathbb{R}^2$

$$S_1 = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}, \quad S_2 = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}, \quad S_\infty = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_\infty = 1\}$$



Σχήμα: Οι μοναδιαίες σφαίρες S_1 , S_2 , S_∞ στο $\mathbb{R}^2$

Άσκηση 6

Έστω ότι το $\mathbf{a}$ είναι ένα τυχαίο αλλά σταθερό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$.

- 1 Ναδειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1$.
- 2 Ναδειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_p \leq n^{1/p} \|\mathbf{a}\|_\infty$ για $p = 1, 2$.

Παρατήρηση 3

Για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$ παρατηρούμε ότι

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\cos \theta| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (6)$$

ισοδύναμα

$$|u_1 v_1 + \dots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \quad (7)$$

(προσπαθήστε να την αποδείξετε). Στην πραγματικότητα η (6) είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

Θεώρημα 2 (Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

Εάν X είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, τότε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του X . Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη. Για $t \in \mathbb{R}$ από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Αν $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ η προς απόδειξη ανισότητα ισχύει σαν ισότητα με τα δύο μέλη ίσα με μηδέν. Για $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ και $t = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle / \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ από την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$0 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

που είναι το ζητούμενο. Ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν $\langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = 0$, ισοδύναμα, από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{u} - t\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ή $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$, δηλαδή τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. $\square$

Θεώρημα 3

Σε ένα διανυσματικό χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ η σχέση $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$, $u \in X$ ορίζει νόρμα. Τη νόρμα αυτή λέμε **επαγόμενη νόρμα**.

Υπό το πρίσμα του τελευταίου αποτελέσματος επαναδιατυπώνουμε

Θεώρημα 4 (Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

Εάν X είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και νόρμα που ορίζεται με τη σχέση $\| \cdot \| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$, τότε

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

για όλα τα διανύσματα u και v του X . Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα u και v είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Σημείωση. Στη περίπτωση μιγαδικού διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ισχύει και πάλι η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της πραγματικής περίπτωσης.

Άσκηση 7

Κατά την απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz δείξαμε ότι $\|\mathbf{u}\|^2 - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από το συμπέρασμα που εξάγεται για την διακρίνουσα αυτού του τριωνύμου (ποιό;) προκύπτει μια άλλη απόδειξη της ανισότητας (πώς;).

Άσκηση 8

Αν με $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ συμβολίσουμε τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$ οι οποίες παίρνουν μιγαδικές τιμές, δείξτε ότι η σχέση

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (8)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Συμπεράνατε ότι η σχέση

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_a^b f(x) \overline{f(x)} dx \right)^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (9)$$

είναι μια νόρμα στο $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$.

4. Ορθογώνιο συμπλήρωμα

Ορισμός 7

Αν S είναι ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το σύνολο όλων των διανυσμάτων του X τα οποία είναι ορθογώνια σε κάθε διάνυσμα του S λέγεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** (orthogonal complement) του S και συμβολίζεται με $S^\perp$, έτσι

$$S^\perp = \{\mathbf{x} \in X : \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle = 0 \text{ για κάθε } \mathbf{s} \in S\}.$$

Αν το S είναι υποσύνολο του X , $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^\perp$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{s} \in S$, τότε

$$\begin{aligned}\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{s} \rangle &= \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle + \langle \mu \mathbf{y}, \mathbf{s} \rangle \\ &= \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{s} \rangle = 0\end{aligned}$$

από τον ορισμό του $S^\perp$, κατά συνέπεια $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in S^\perp$. Δείξαμε λοιπόν ότι

Θεώρημα 5

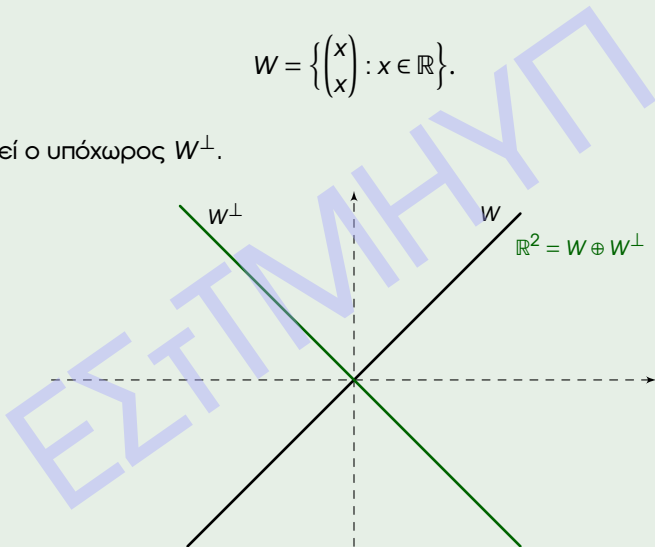
Αν το S είναι υποσύνολο του διανυσματικού χώρου X με εσωτερικό γινόμενο, το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^\perp$ του S είναι υπόχωρος του X .

Παράδειγμα 7

Η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Να βρεθεί ο υπόχωρος $W^\perp$.



Παράδειγμα 7 (συνέχεια)

Αν $(y \ z)^T \in W^\perp$, τότε

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = xy + xz = x(y + z) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως $z = -y$. Κατά συνέπεια, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W είναι το

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

δηλαδή η ευθεία με εξίσωση $y = -x$.

Άσκηση 9

Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παρατήρηση 4

Σε σχέση με το Παράδειγμα 7 παρατηρούμε ότι οι υπόχωροι W και $W^\perp$ αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix},$$

δηλαδή το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ γράφεται σαν το άθροισμα $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$, όπου $\mathbf{w} \in W$ και $\mathbf{w}' \in W^\perp$. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται.

Θεώρημα 6

Αν το W είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X πεπερασμένης διάστασης, με εσωτερικό γινόμενο, τότε $X = W \oplus W^\perp$, δηλαδή ο X είναι το ευθύ άθροισμα των W και $W^\perp$.

Πόρισμα 1

Αν το W είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X διάστασης n , με εσωτερικό γινόμενο, τότε $\dim W^\perp = n - \dim W$.

Πρόταση 1

Αν το W είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X διάστασης n , με εσωτερικό γινόμενο, τότε $(W^\perp)^\perp = W$.

Αναρωτιόμαστε αν θα μπορούσε να είναι διαφορετικό το συμπέρασμα αφού

$$X = W \oplus W^\perp \quad \text{και} \quad X = W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp,$$

ως συνέπεια του Θεωρήματος 5.

Απόδειξη.

Δείχνουμε πρώτα ότι $(W^\perp)^\perp \subseteq W$. Αν $\mathbf{x} \in (W^\perp)^\perp$, τότε ως στοιχείο του χώρου X γράφεται ως $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$, όπου $\mathbf{w} \in W$ και $\mathbf{z} \in W^\perp$, βλέπε Θεώρημα 9.4. Έτσι υπολογίζουμε

$$\mathbf{0} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{w} + \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \|\mathbf{z}\|^2$$

αφού $\mathbf{w} \perp \mathbf{z}$, συνεπώς, από τον ορισμό της νόρμας, παίρνουμε $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, ισοδύναμα $\mathbf{x} = \mathbf{w} \in W$, δηλαδή $(W^\perp)^\perp \subseteq W$. Απομένει να δείξουμε ότι $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. Πράγματι αν $\mathbf{x} \in W$, τότε $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{y} \in W^\perp$, επομένως $\mathbf{x} \in (W^\perp)^\perp$, που είναι το ζητούμενο. □

Ερώτημα: Αν X είναι διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και V, W είναι υπόχωροι του X τέτοιοι ώστε

$$X = V \oplus V^\perp, \quad \text{και} \quad X = V \oplus W,$$

είναι αλήθεια ότι $W = V^\perp$;

Παράδειγμα 8 (ή αντιπαράδειγμα)

Στο $\mathbb{R}^2$ θέτουμε

$$L_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad L_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad L_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Τότε $L_2 = L_1^\perp$ (γιατί;), $\mathbb{R}^2 = L_1 \oplus L_2$ και $\mathbb{R}^2 = L_1 \oplus L_3$, αφού

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix},$$

αλλά κάθε άλλο παρά $L_2 = L_3$.