

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 6

Διανυσματικοί υπόχωροι Βάση & Διάσταση Διανυσματικού χώρου

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

11 Νοεμβρίου 2025

Ορισμός 1

Αν $\mathcal{V}$ ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F}$ είναι ένα σώμα, (στη πράξη $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, ή $\mathcal{F} = \mathbb{C}$) και αν $+$ και $\cdot$ είναι δύο πράξεις, για τις οποίες ικανοποιούνται οι νόμοι

- V1 $x + y \in \mathcal{V}$, για κάθε $x, y \in \mathcal{V}$
- V2 $x + y = y + x$, για κάθε $x, y \in \mathcal{V}$
- V3 $x + (y + z) = (x + y) + z$, για κάθε $x, y, z \in \mathcal{V}$
- V4 υπάρχει $0 \in \mathcal{V}$ τέτοιο ώστε $0 + x = x$ για κάθε $x \in \mathcal{V}$
- V5 για κάθε $x \in \mathcal{V}$ υπάρχει $-x \in \mathcal{V}$ έτσι ώστε $-x + x = 0$
- V6 $\lambda \cdot x \in \mathcal{V}$, για κάθε $x \in \mathcal{V}$ και $\lambda \in \mathcal{F}$
- V7 $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$, για κάθε $x \in \mathcal{V}$ και $\lambda, \mu \in \mathcal{F}$
- V8 $1 \cdot x = x$, για κάθε $x \in \mathcal{V}$
- V9 $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$, για κάθε $x, y \in \mathcal{V}$ και $\lambda \in \mathcal{F}$
- V10 $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$, για κάθε $x \in \mathcal{V}$ και $\lambda, \mu \in \mathcal{F}$.

θα λέμε ότι η τριάδα $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ είναι ένας **διανυσματικός χώρος** (vector space) πάνω στο σώμα $\mathcal{F}$. Στη γενική περίπτωση γράφουμε $\mathcal{V}(\mathcal{F})$. Το χώρο $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ τον λέμε **πραγματικό διανυσματικό χώρο**, ενώ τον $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ τον λέμε **μιγαδικό διανυσματικό χώρο**. Τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου θα τα λέμε **διανύσματα** (vectors).

Παρατήρηση 1

Αν p είναι ένα πολυώνυμο στον χώρο $\mathbb{P}_n$ και $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \cdots + a_nx^n$, τότε η απεικόνιση $L: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ που ορίζεται με τη σχέση

$$L(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

είναι ένα-προς-ένα και επί και επιπλέον για $p, q \in \mathbb{P}_n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$L(p+q) = L(p) + L(q), \quad \text{και} \quad L(\lambda p) = \lambda L(p). \quad (1)$$

Μια τέτοια ένα-προς-ένα απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων λέγεται **ισομορφισμός** και η ύπαρξη ενός ισομορφισμού μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων δηλώνει ότι οι δύο χώροι, πρακτικά, ταυτίζονται. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεχόμαστε ότι η k -συνιστώσα ενός διανύσματος στο $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι ο συντελεστής του x^{k-1} , $k = 1, 2, \dots, n+1$.

Παρατήρηση 1 (συνέχεια)

Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε την αντιστοιχία

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2 - 3x + x^2 \in \mathbb{P}_2.$$

Επίσης το άθροισμα διανυσμάτων ή το γινόμενο διανύσματος με σταθερά αντιστοιχεί και δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με το άθροισμα των αντιστοίχων πολυωνύμων ή το γινόμενο του αντίστοιχου πολυωνύμου με την σταθερά.

Ορισμός 2

Αν $(X, +, \cdot)$ και $(Y, +, \cdot)$ είναι διανυσματικοί χώροι μια απεικόνιση $F : X \rightarrow Y$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$F(x + y) = F(x) + F(y), \quad \text{και} \quad F(\lambda x) = \lambda F(x), \quad (2)$$

για κάθε x και y στο X και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, θα λέγεται **γραμμική απεικόνιση** (linear map) ή **γραμμικός μετασχηματισμός** (linear transformation).

1. Διανυσματικοί υπόχωροι

Παράδειγμα 1

Αν

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ αποτελούν διανυσματικό χώρο.

Αν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix},$$

έτσι αν ονομάσουμε W το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών τότε

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad z = x+y \right\}.$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Αν $\mathbf{w}$ και $\mathbf{z}$ είναι διανύσματα στο W , τότε

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} p \\ p+q \\ q \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} r \\ r+s \\ s \end{pmatrix}$$

οπότε για $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathbf{w} + \mathbf{z} = \begin{pmatrix} p+r \\ (p+q) + (r+s) \\ q+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+r \\ (p+r) + (q+s) \\ q+s \end{pmatrix}, \quad \lambda \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda(p+q) \\ \lambda q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda p + \lambda q \\ \lambda q \end{pmatrix}$$

κατά συνέπεια $\mathbf{w} + \mathbf{z} \in W$ και $\lambda \mathbf{w} \in W$. Το μηδενικό διάνυσμα περιέχεται στο W αφού $\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v}$. Επίσης αν $\mathbf{w} \in W$, τότε για κάποια $a, b \in R$ είναι $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, οπότε $-\mathbf{w} = (-a)\mathbf{u} + (-b)\mathbf{v} \in W$. Οι υπόλοιποι νόμοι (V1), (V2) και (V5)-(V8) αυτόματα ικανοποιούνται αφού αφορούν σε ιδιότητες των πράξεων μεταξύ στοιχείων του $\mathbb{R}^3$, ή του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{R}^3$ και $W \subset \mathbb{R}^3$. Έτσι η δομή $(W, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Από το Παράδειγμα 1 εξαγονται μερικά σημαντικά συμπεράσματα:

- ❶ Ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου μπορεί να είναι διανυσματικός χώρος με πράξεις τον περιορισμό των πράξεων του αρχικού χώρου στο υποσύνολο.
- ❷ Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών κάποιας συλλογής διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου με πράξεις τον περιορισμό των πράξεων του αρχικού χώρου έχει τη δομή διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 3

Εάν ο X είναι διανυσματικός χώρος και $W \subseteq X$, θα λέμε ότι ο W είναι **διανυσματικός υπόχωρος** (vector subspace) ή απλά **υπόχωρος** του X εάν ο περιορισμός των πράξεων του X στο W προσδίδει στο W τη δομή διανυσματικού χώρου.

Θεώρημα 1

Εάν ο X είναι διανυσματικός χώρος και $W \subseteq X$, ο W είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν για κάθε u και v στο W και για κάθε λ και μ στο $\mathbb{R}$ το $\lambda u + \mu v$ είναι στοιχείο του W .

Ορισμός 4

Εάν ο X είναι διανυσματικός χώρος και $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του X , το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{u}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ συμβολίζουμε με $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, έτσι

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

και ονομάζουμε **διάνοιγμα** (span) των $\mathbf{u}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Αν $S \subseteq X$ με $\text{span}(S)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του S .

Θεώρημα 2

Έστω ότι $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του διανυσματικού χώρου X , τότε

- ① Το $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ είναι υπόχωρος του X .
- ② Εάν W είναι υπόχωρος του X και $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subseteq W$, τότε το διάνοιγμα $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ είναι υπόχωρος του W , δηλαδή ο $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος ο οποίος περιέχει τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$.

Παράδειγμα 2 (Η ευθεία ως διανυσματικός υπόχωρος)

Εάν $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$, τότε το $\text{span}\{\mathbf{u}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και αποτελείται απ' όλα τα διανύσματα της μορφής $\lambda \mathbf{u}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια είναι η ευθεία που περιέχει το $\mathbf{u}$, ας την πούμε $L_{\mathbf{u}}$. Η $L_{\mathbf{u}}$ μπορεί να παρασταθεί με την **διανυσματική** εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ειδικά στο $\mathbb{R}^2$ αν $\mathbf{u} = (p \ q)^T$ το διάνυσμα $(x \ y)^T$ ανήκει στον $L_{\mathbf{u}}$ αν και μόνον αν

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_0 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = pt_0 \\ y = qt_0 \end{cases}$$

για κάποιο $t_0 \in \mathbb{R}$, απ' όπου έπεται ότι $qx = py$, ή $qx - py = 0$. **Συμπέρασμα:** οι ευθείες που είναι υπόχωροι στο $\mathbb{R}^2$ έχουν **αλγεβρική** εξίσωση $ax + by = 0$. Σημειώνουμε ότι μια ευθεία με εξίσωση $ax + by + c = 0$, με $c \neq 0$, δεν μπορεί να είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ γιατί δεν περιέχει το διάνυσμα $\mathbf{0}$.

2. Γραμμική εξάρτηση – γραμμική ανεξαρτησία

Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{a} = \beta \mathbf{b}$, για κάποια σταθερά β θα λέμε ότι τα δύο διανύσματα είναι **γραμμικά εξαρτημένα**. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε

$$(-1)\mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι τα $\mathbf{a}$, και $\mathbf{b}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ και υπάρχουν σταθερές α και β , όχι και οι δύο μηδέν ώστε

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Έστω ότι $\alpha \neq 0$, τότε θα είναι $\mathbf{a} = -(\beta/\alpha)\mathbf{b} = \lambda \mathbf{b}$, δηλαδή το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου, δηλαδή τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Κατά συνέπεια οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

- 1 Τα διανύσματα $\mathbf{a}$, και $\mathbf{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
- 2 Για κάποια σταθερά λ ισχύει $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$.
- 3 Υπάρχουν σταθερές α και β όχι και οι δύο ίσες με μηδέν ώστε $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Ορισμός 5

Για τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ του διανυσματικού χώρου $X(\mathcal{F})$, θα λέμε ότι

- ❶ Είναι **γραμμικά εξαρτημένα** (linearly dependent) εάν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$ όχι όλες ίσες με μηδέν ώστε

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

- ❷ Είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** (linearly independent) εάν οποτεδήποτε για σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$ ισχύει

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

τότε αναγκαστικά $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Ισοδύναμα: Θεωρούμε την εξίσωση

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Θα λέμε ότι τα διανύσματα είναι:

γραμμικά ανεξάρτητα αν η εξίσωση έχει μόνο τη μηδενική λύση.

γραμμικά εξαρτημένα αν η εξίσωση έχει μη μηδενική λύση.

Παρατηρήσεις

Ας θεωρήσουμε τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ του διανυσματικού χώρου $X(\mathcal{F})$.

- ❶ Εάν τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε κάποιο ή κάποια από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Πράγματι υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$ μία τουλάχιστον από τις οποίες είναι διάφορη του μηδενός ώστε

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Έστω, για παράδειγμα, ότι $c_2 \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= -\frac{c_1}{c_2} \mathbf{u}_1 - \frac{c_3}{c_2} \mathbf{u}_3 - \dots - \frac{c_n}{c_2} \mathbf{u}_n \\ &= c'_1 \mathbf{u}_1 + c'_3 \mathbf{u}_3 + \dots + c'_n \mathbf{u}_n. \end{aligned}$$

- ❷ Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν κάποιο από τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι αν, για παράδειγμα, υποθέσουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{u}_2$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε

$$\mathbf{u}_2 = c_1 \mathbf{u}_1 + c_3 \mathbf{u}_3 + \dots + c_n \mathbf{u}_n \Rightarrow c_1 \mathbf{u}_1 + (-1) \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

δηλαδή τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

- 3 Εάν κάποιο από τα διανύσματα είναι το μηδενικό, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι υποθέτοντας, για παράδειγμα, ότι $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, τότε για $c_1 = c_3 = \dots = c_n = 0$ και $c_2 \neq 0$ έχουμε

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Παράδειγμα 3

Οι συναρτήσεις $\sin$ και $\cos$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στον χώρο $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ ή $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Πράγματι αν ήταν γραμμικά εξαρτημένες τότε η μια θα ήταν πολλαπλάσιο της άλλης, ισοδύναμα για κάποια πραγματική σταθερά λ θα ήταν $\sin x = \lambda \cos x$, για κάθε x . Τότε όμως θα έπρεπε

$$\sin(\pi/2) = \lambda \cos(\pi/2) \Leftrightarrow 1 = \lambda \cdot 0 = 0$$

που είναι αδύνατο, άρα οι $\sin$ και $\cos$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 4

Δείξτε ότι τρία διανύσματα

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

στο $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Περίπτωση 1: Τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν σταθερές α, β με $\alpha \neq 0$, ή $\beta \neq 0$, ώστε $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$, επομένως για $\gamma = 0$ είναι

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

με $\alpha \neq 0$, ή $\beta \neq 0$, ισοδύναμα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Περίπτωση 2: Τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δείχνουμε ότι στη περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} := a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0. \quad (3)$$

Παράδειγμα 4 (συνέχεια)

Πράγματι Επειδή $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ θα πρέπει $b_1 \neq 0$, ή $b_2 \neq 0$ και $a_1 \neq 0$, ή $a_2 \neq 0$.
Έστω $b_1 \neq 0$, τότε αφού $\mathbf{a} \neq \lambda \mathbf{b}$ για κάθε σταθερά λ , θα πρέπει

$$a_2 \neq \frac{a_1}{b_1} b_2 \quad \text{αφού} \quad a_1 = \frac{a_1}{b_1} b_1$$

κατά συνέπεια $a_2 b_1 \neq a_1 b_2$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι υπάρχουν σταθερές α και β ώστε $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$, ή ισοδύναμα ότι το σύστημα

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

έχει λύση. Από την (3) έπεται ότι το μητρώο των συντελεστών αντιστρέφεται επομένως

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

κατά συνέπεια

Παράδειγμα 4 (συνέχεια)

$$\alpha = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad \beta = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (6)$$

Γι αυτά λοιπόν τα α και β έχουμε

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + (-1) \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

συνεπώς τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ορισμός 6

Μια εξίσωση

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

με $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ πραγματικές (ή μιγαδικές) σταθερές λέγεται **γραμμική εξίσωση** στο $\mathbb{R}^n$ (ή στο $\mathbb{C}^n$). Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων λέγεται **γραμμικό σύστημα**.

Παρατήρηση 2

Στο Παράδειγμα 4 δείξαμε ότι αν τα διανύσματα

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε ισχύει η (3), δηλαδή η ορίζουσα των συνιστωσών των διανυσμάτων είναι διαφορετική του μηδενός. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η ορίζουσα των συνιστωσών είναι διαφορετική του μηδενός, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι υποθέτοντας ότι ισχύει η (3) και θεωρώντας την εξίσωση

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

δηλαδή με $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, από την (6) βρίσκουμε $\alpha = \beta = 0$ που είναι ο ισχυρισμός μας.

♣ Ένα από τα αποτελέσματα που δείξαμε στο Παράδειγμα 4 μπορεί να διατυπωθεί σε “οριζουσιακή” διάλεκτο ως εξής: Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2\end{aligned}\tag{7}$$

Εάν η ορίζουσα των συντελεστών

$$\det(\mathbf{a}\mathbf{b}) := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1\tag{8}$$

είναι διάφορη του μηδενός, τότε το σύστημα (7) έχει μοναδική λύση η οποία δίνεται από τις σχέσεις

$$x = \frac{\det(\mathbf{c}\mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}\mathbf{b})} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\det(\mathbf{a}\mathbf{c})}{\det(\mathbf{a}\mathbf{b})} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.\tag{9}$$

Το αποτέλεσμα γενικεύεται και σε περισσότερες διαστάσεις (σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους). Ο τύπος στην (9) λέγεται κανόνας του Cramer. Θα επανέλθουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 3

Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n+1}$, είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$, τότε είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Για την απόδειξη του θεωρήματος πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ όχι όλες ίσες με μηδέν ώστε

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Αν

$$\mathbf{u}_k = (a_1^k \ a_2^k \ \dots \ a_n^k)^T, \quad k = 1, 2, \dots, n+1,$$

η εξίσωση (13) είναι ισοδύναμη με ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους, τις σταθερές c_k , $k = 1, 2, \dots, n+1$

$$\begin{aligned} a_1^1 c_1 + a_1^2 c_2 + \dots + a_1^{n+1} c_{n+1} &= 0 \\ a_2^1 c_1 + a_2^2 c_2 + \dots + a_2^{n+1} c_{n+1} &= 0 \\ &\vdots \\ a_n^1 c_1 + a_n^2 c_2 + \dots + a_n^{n+1} c_{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Κατά συνέπεια αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα (14) έχει μη μηδενική λύση.

Ένα τέτοιο σύστημα, του οποίου οι σταθερές στο δεξί μέλος είναι μηδέν, λέγεται **ομοιογενές** (homogeneous). Αποδεικνύουμε λοιπόν το ισοδύναμο

Θεώρημα 4

Κάθε ομοιογενές γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με $n + 1$ αγνώστους έχει μη μηδενική λύση.

Παράδειγμα 5

Για το σύστημα

$$2x + 3y - 2z = 0$$

$$4x - 6y + 2z = 0$$

η $x = 1, y = 2, z = 4$ είναι λύση. Υπάρχουν άλλες λύσεις;

Πόρισμα 1

Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^m$, και $n > m$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

3. Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Κάθε διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

έτσι ώστε αν u_1, u_2, u_3 είναι οι συνιστώσες του $\mathbf{u}$, τότε

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3.$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι αν $c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, τότε $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (γιατί;) δηλαδή τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ορισμός 7

Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ ενός διανυσματικού χώρου $X(\mathcal{F})$ αποτελούν μια **βάση** (basis) του διανυσματικού χώρου αν

- 1 Τα διανύσματα παράγουν το χώρο, δηλαδή $\text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\} = X$, και
- 2 Τα διανύσματα $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 6

Τα διανύσματα

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Πράγματι γράφοντας

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι για $c = z$, $b = y - z$, $a = x - y$ για το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = (x \ y \ z)^T$ έχουμε

$$\mathbf{u} = (x - y)\mathbf{b}_1 + (y - z)\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3,$$

δηλαδή $\text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \mathbb{R}^3$. Επιπλέον από την εξίσωση $a\mathbf{b}_1 + b\mathbf{b}_2 + c\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$

Παράδειγμα 6 (συνέχεια)

βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases}$$

απ' όπου με ``προς τα πίσω αντικατάσταση`` προκύπτει $a = b = c = 0$, δηλαδή τα διανύσματα $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, κατά συνέπεια αποτελούν μια βάση για τον $\mathbb{R}^3$.

Παρατήρηση 3

Από το Παράδειγμα (Π3) και την παρατήρηση στην εισαγωγή της παραγράφου συμπεραίνουμε ότι η βάση ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα οι

$$\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$$

είναι βάσεις του $\mathbb{R}^3$. Η ιδιαίτερη $\mathcal{B}_1$ λέγεται **κανονική** βάση. Γενικά η $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ με ανάλογα $\mathbf{e}_k$ λέγεται κανονική βάση για τον $\mathbb{R}^n$.

Το γεγονός ότι οι βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ του $\mathbb{R}^3$ περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων δεν είναι τυχαίο.

Θεώρημα 5

Εάν $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ και $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ είναι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου X , τότε $m = n$.

Ορισμός 8

Το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης $\mathcal{B}$ ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται **διάσταση** (dimension) του χώρου. Αν το $\mathcal{B}$ είναι πεπερασμένο σύνολο θα λέμε ότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση, διαφορετικά ο X θα λέγεται απειροδιάστατος χώρος. Αν η διάσταση του X είναι n , γράφουμε $\dim X = n$. Αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης γράφουμε $\dim X < \infty$.

Θεώρημα 6

Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, είναι διανύσματα του m -διάστατου χώρου X , δηλαδή $\dim X = m$, και $n > m$, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Θεώρημα 7

Εάν $\dim X < \infty$ και ο W είναι υπόχωρος του X , τότε

- ① Ο υπόχωρος W έχει πεπερασμένη διάσταση.
- ② $\dim W \leq \dim X$.
- ③ Εάν $\dim W = \dim X$, τότε $W = X$.

Θεώρημα 8 (Επέκταση βάσης υποχώρου)

Εάν $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων στο χώρο X πεπερασμένης διάστασης, και $\text{span } S \neq X$, τότε υπάρχουν διανύσματα $\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+2}, \dots, \mathbf{w}_n$ με $n = \dim X$, ώστε το σύνολο $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+2}, \dots, \mathbf{w}_n\}$ να είναι μια βάση για τον X .

Άσκηση 1

Δείξτε ότι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ είναι μια βάση για τον $\mathbb{P}_n$. Συμπεράνατε ότι $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.

Παράδειγμα 7

Τα διανύσματα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 + c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Επομένως παράγουν έναν διδιάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$, τον

$$W = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y = x + z, \quad \mu\epsilon \quad x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

για τον οποίο αποτελούν μια βάση.

Παράδειγμα 7 (συνέχεια)

Ισχυριζόμαστε ότι εμπλουτίζοντας τη βάση $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ του W με ένα διάνυσμα $\mathbf{a}_3$ του $\mathbb{R}^3$ ώστε τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, παίρνουμε μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Επιλέγοντας ένα διάνυσμα που δεν έχει τη δομή των στοιχείων του W , για παράδειγμα

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ είναι όντως γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;) και επιπλέον παράγουν τον χώρο $\mathbb{R}^3$, αφού το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ του $\mathbb{R}^3$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ όπως βλέπουμε στη σχέση

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y - x - z \\ 0 \end{pmatrix} = x\mathbf{a}_1 + z\mathbf{a}_2 + (y - x - z)\mathbf{a}_3.$$

Κατά συνέπεια το σύνολο $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ είναι μια βάση για το $\mathbb{R}^3$.