

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 13. Γραμμικοί μετασχηματισμοί

1. Τα διανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

αποτελούν μια βάση για το $\mathbb{R}^3$. Αν για ένα γραμμικό μετασχηματισμό $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ισχύει

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

να βρεθεί ο τύπος του μετασχηματισμού.

Λύση 1

Θέλουμε μια έκφραση της μορφής

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \end{pmatrix}.$$

Επειδή

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

όπου τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ αποτελούν τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$, από γραμμικότητα του μετασχηματισμού έχουμε

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = xT(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) + zT(\mathbf{e}_3), \quad (1)$$

κατά συνέπεια θέλουμε να εκφράσουμε τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ μέσω των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Έτσι

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_3 \end{array} \right.$$

οπότε από την (1) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= xT(\mathbf{u}_3) + yT(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) + zT(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \\ &= zT(\mathbf{u}_1) + (y - z)T(\mathbf{u}_2) + (x - y)T(\mathbf{u}_3) \\ &= z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - y) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 2x - y + 2z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Λύση 2

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα για τη σύνθεση γραμμικών μετασχηματισμών.

Αν $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει την συνήθη βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ στην $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, εκφράζει δηλαδή κάθε $\mathbf{e}_i$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{u}_j$, τότε όπως είδαμε

$$S(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_3, \quad S(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \quad S(\mathbf{e}_3) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

κατά συνέπεια το μητρώο αναπαράστασής του είναι το

$$A_S = (S(\mathbf{e}_1) \ S(\mathbf{e}_2) \ S(\mathbf{e}_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Όμοια το μητρώο αναπαράστασης του T , όπως δίνεται είναι το

$$A_T = (T(\mathbf{u}_1) \ T(\mathbf{u}_2) \ T(\mathbf{u}_3)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

επομένως το μητρώο του μετασχηματισμού ως προς τις συνήθεις βάσεις του $\mathbb{R}^3$ και του $\mathbb{R}^2$ είναι

$$A_T A_S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 2x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση: Επειδή

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

από την (2) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - y) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - y) \left[- \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= (-x + y + z) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (5x - 4y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$\text{image } T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ να είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^3$ επί του επιπέδου W με εξίσωση $x + y + z = 0$. Να βρεθεί ο τύπος του T .

Λύση 1

Δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του επιπέδου είναι τα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

έτσι αν $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)$ το μητρώο προβολής επί του επιπέδου είναι το $P = A(A^T A)^{-1} A^T$. Έχουμε λοιπόν

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Λύση 2

Αν $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του W , τότε

$$T(\mathbf{x}) = \text{proj}_W \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2.$$

Παίρνουμε

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. **Θεώρημα αναπαράστασης.** Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι υπάρχει διάνυσμα $\xi \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$T(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \xi \rangle$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Υπόδειξη. Αν $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ είναι μια βάση στο $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n$.

Έχει λυθεί στην τελευταία διάλεξη.

4. Έστω $X = \mathcal{C}[0, 1]$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 1]$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό $I : X \rightarrow X$, όπου $I(f) = F$ με

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

(α) Δείξτε ότι ο I είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

(β) Περιγράψτε την εικόνα image I , του I .

(γ) Δείξτε ότι ο I είναι ένα-προς-ένα. **Υπόδειξη:** $I(f)(0) = 0$ για κάθε $f \in X$.

(δ) Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός I^{-1} .

5. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -5x + 13y \\ -7x + 16y \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί το μητρώο του T ως προς τις βάσεις

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{και} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

6. Έστω $\mathbf{u} = (a \ b \ c)^T$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$. Επιβεβαιώστε ότι το μητρώο $P = (I - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)$ είναι το μητρώο προβολής επί του επιπέδου με εξίσωση $ax + by + cz = 0$. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως $T(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$.

(α) Να βρεθεί ο τύπος του T .

(β) Να βρεθεί η εικόνα $\text{image } T$ του T .

(γ) Να βρεθεί ο πυρήνας $\text{kernel } T$ του μετασχηματισμού.

7. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους των πολυωνύμων $\mathbb{P}_2$ και $\mathbb{P}_3$ και τον μετασχηματισμό ολοκλήρωμα $J : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ όπου για $p \in \mathbb{P}_3$ είναι $J(p) = P$ με

$$P(x) = \int_0^x p(t) \, dt.$$

(α) Να βρεθεί η εικόνα $\text{image } J$ του J .

(β) Εξετάστε αν ο μετασχηματισμός ένα-προς-ένα.

(γ) Να βρεθεί το μητρώο που παριστάνει τον J .