

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 13. Γραμμικοί μετασχηματισμοί

1. Τα διανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

αποτελούν μια βάση για το $\mathbb{R}^3$. Αν για ένα γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ισχύει

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

να βρεθεί ο τύπος του μετασχηματισμού.

2. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ να είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^3$ επί του επιπέδου W με εξίσωση $x + y + z = 0$. Να βρεθεί ο τύπος του T .

3. **Θεώρημα αναπαράστασης.** Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι υπάρχει διάνυσμα $\xi \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$T(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \xi \rangle$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Υπόδειξη. Αν $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ είναι μια βάση στο $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n$.

4. Έστω $X = \mathcal{C}[0, 1]$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 1]$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό $I : X \rightarrow X$, όπου $I(f) = F$ με

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

(α) Δείξτε ότι ο I είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

(β) Περιγράψτε την εικόνα $\text{image } I$, του I .

(γ) Δείξτε ότι ο I είναι ένα-προς-ένα. **Υπόδειξη:** $I(f)(0) = 0$ για κάθε $f \in X$.

(δ) Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός I^{-1} .

5. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -5x + 13y \\ -7x + 16y \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί το μητρώο του T ως προς τις βάσεις

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{και} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

6. Έστω $\mathbf{u} = (a \ b \ c)^T$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$. Επιβεβαιώστε ότι το μητρώο $P = (I - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)$ είναι το μητρώο προβολής επί του επιπέδου με εξίσωση $ax + by + cz = 0$. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως $T(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$.

(α) Να βρεθεί ο τύπος του T .

(β) Να βρεθεί η εικόνα $\text{image } T$ του T .

(γ) Να βρεθεί ο πυρήνας $\text{kernel } T$ του μετασχηματισμού.

7. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους των πολωνύμων $\mathbb{P}_2$ και $\mathbb{P}_3$ και τον μετασχηματισμό ολοκλήρωμα $J : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ όπου για $p \in \mathbb{P}_3$ είναι $J(p) = P$ με

$$P(x) = \int_0^x p(t) \, dt.$$

(α) Να βρεθεί η εικόνα $\text{image } J$ του J .

(β) Εξετάστε αν ο μετασχηματισμός ένα-προς-ένα.

(γ) Να βρεθεί το μητρώο που παριστάνει τον J .