

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12. Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση

Επισκόπηση

1. Έστω A ένα τετραγωνικό, $n \times n$, μητρώο. Εάν

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

η σταθερά λ λέγεται **ιδιοτιμή** του A και το x το **αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα**.

2. Εάν A είναι ένα τετραγωνικό, $n \times n$, μητρώο, το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A ορίζεται ως το

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

- Ο βαθμός του p είναι n .
- Ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι

$$p(0) = p(-A) = (-1)^n \det A.$$

- Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
- Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $m \leq n$ είναι οι ιδιοτιμές του A , τότε

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$

Το k_j είναι η **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_j .

3. Αν λ είναι ιδιοτιμή του A ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα (στο λ) είναι ένα στοιχείο του μηδενόχωρου $\text{null}(\lambda I - A)$.

Ο μηδενόχωρος $\text{null}(\lambda I - A)$ λέγεται **ιδιόχωρος** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

- Η διάσταση του $\text{null}(\lambda I - A)$, $\dim \text{null}(\lambda I - A)$ ορίζεται ως **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ .

4. **Θεώρημα Cayley – Hamilton.** Αν $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A , τότε

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = O.$$

5. Τα τετραγωνικά μητρώα A και B λέγονται **όμοια** αν υπάρχει αντιστρέψιμο μητρώο M , ώστε $A = M^{-1}BM$.

6. Το A λέγεται **διαγωνοποιήσιμο** αν είναι όμοιο με κάποιο διαγώνιο μητρώο.

7. **Θεώρημα.** Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν το A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα το A είναι διαγωνοποιήσιμο.

8. **Θεώρημα.** Εάν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής λ είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα τότε το A είναι διαγωνοποιήσιμο. Στην περίπτωση αυτή αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές όπου κάθε ιδιοτιμή επαναλαμβάνεται σύμφωνα με την πολλαπλότητά της, και $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ είναι τα αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε

$$A = X\Lambda X^{-1},$$

$$\text{όπου} \quad X = (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n) \quad \text{και} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n).$$

Ασκήσεις

1. Παραλλαγή της Άσκησης 22 §6.2 Strang. Δίνεται το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι του A .

(β) Διαγωνοποιήστε το A .

(γ) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1.$$

(α) Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $p_A(\lambda) = 0$, έτσι βρίσκουμε

$$(\lambda - 2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm 1,$$

έτσι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$. Για τους αντίστοιχους ιδιόχωρους έχουμε

$$\lambda_1 : (1I - A)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 = -x_1$$

$$\lambda_3 : (2I - A)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 = x_1$$

επομένως οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι E_1 και E_2 είναι οι

$$E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(β) Από το 8. στην Επισκόπηση έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(γ) Επειδή $A = X\Lambda X^{-1}$, έχουμε $A^n = A = X\Lambda^n X^{-1}$, έτσι

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ -1 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Εάν για το τετραγωνικό μητρώο ισχύει $A^2 = A$ και το διάνυσμα $\mathbf{u}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ , τί μπορεί να ειπωθεί για το λ ;

Λύση

Επειδή $A^2 = A$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} A^2\mathbf{u} &= A\mathbf{u} \Rightarrow A(A\mathbf{u}) = A\mathbf{u} \Rightarrow A\lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \\ &\Rightarrow \lambda A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \\ &\Rightarrow \lambda^2\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \\ &\Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)\mathbf{u} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

και επειδή $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ έπεται ότι

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$$

κατά συνέπεια $\lambda = 0$, ή $\lambda = 1$.

3. Θεωρήστε το **μη αντιστρέψιμο** μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- (α) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p_A του A , ακριβώς, προσδιορίζοντας δηλαδή, και αριθμητικά όπου εφαρμόζεται, όλους τους συντελεστές.
(β) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A .

Λύση

Αφού το μητρώο A είναι μη αντιστρέψιμο έχουμε ότι $\det A = 0$, ισοδύναμα

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc.$$

- (α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p_A του A είναι

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$$

Επειδή από την υπόθεση $ad = bc$ έχουμε τελικά

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda.$$

- (β) Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, έτσι αφού

$$p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - (a + d)),$$

οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda = 0$ και $\lambda = a + d$.

4. Άσκηση 15 §6.1 Strang. Κάθε μητρώο μετάθεσης P , ας πούμε 3×3 , αφήνει το $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ αμετάβλητο, κατά συνέπεια το $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή. Να βρεθούν οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του μητρώου μετάθεσης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του P

$$p_P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1$$

Οι ιδιοτιμές του P είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, και αφού το $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή του P με διαίρεση βρίσκουμε

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

και οι ρίζες της εξίσωσης $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ είναι οι

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

κατά συνέπεια οι ιδιοτιμές του P είναι οι

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Άσκηση 16 §6.1 Strang. Αποδείξτε ότι η οριζούσα μητρώου A ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του A .

Λύση

Βλέπε Θεώρημα στη σελίδα 223 στις Σημειώσεις (eclass: Έγγραφα).

6. Άσκηση 17 §6.1 Strang. Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων (το ίχνος) μητρώου ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών.

Λύση

Βλέπε Θεώρημα στη σελίδα 223 στις Σημειώσεις (eclass: Έγγραφα).

7. Να βρεθεί ένα ορθογώνιο μητρώο Q το οποίο διαγωνοποιεί το

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Βλέπε Παράδειγμα 9.6 στις σελίδες 228-229 και Παράδειγμα 9.7 στις σελίδες 234-235 στις Σημειώσεις (eclass: Έγγραφα).

8. Ένα 3×3 μητρώο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(α) ■ $\text{trace } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + 2 = 5$, από την 6.

(β) Το μητρώο A είναι αντιστρέψιμο. Το $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του A .

(Σ) Λ

(γ) ■ $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$, από την 5.

(δ) Το μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο. Τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. (Σ) Λ

(ε) ■ $A =$

$$\begin{aligned} A &= (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$