

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11. Ορίζουσες

Επισκόπηση

- **Οι ιδιότητες της ορίζουσας** Έστω A ένα τετραγωνικό μητρώο.

- (O1) Εάν $A = I$, τότε $\det A = 1$, η ορίζουσα του ταυτοτικού μητρώου είναι ίση με 1.
- (O2) Εάν το μητρώο A' προκύπτει από το A με εναλλαγή δύο γραμμών του, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο, δηλαδή $\det A' = -\det A$.
- (O3) Η ορίζουσα μητρώου ως συνάρτηση είναι γραμμική ξεχωριστά ως προς κάθε γραμμή κρατώντας τις άλλες γραμμές σταθερές.
- (O4) $\det A^T = \det A$, η ορίζουσα του αναστροφου μητρώου είναι ίση με την ορίζουσα του μητρώου.
- (O5) Εάν οι δύο γραμμές του A είναι ίσες, τότε $\det A = 0$.
- (O6) Εάν οι δύο γραμμές του A είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε $\det A = 0$.
- (O7) Εάν σε μια γραμμή του A προστεθεί το πολλαπλάσιο άλλης γραμμής, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

Η αντίστοιχη εκδοχή για στήλη ή στήλες καθεμιάς από τις ιδιότητες (O2) – (O3) και (O5) – (O7) ισχύει επίσης.

- **Η ορίζουσα γινομένου** Εάν A και B είναι $n \times n$ μητρώα, τότε $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- **Ορίζουσα και αντιστροφή** Εάν A είναι ένα $n \times n$ μητρώο, τότε

$$\text{Το } A^{-1} \text{ υπάρχει} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank } A = n.$$

- **Το ανάπτυγμα της ορίζουσας** Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένα $n \times n$ μητρώο με $n \geq 2$, τότε η ορίζουσα του A δίνεται από τη σχέση

1. **ως προς γραμμή** για $1 \leq i \leq n$

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}.$$

2. **ως προς στήλη** για $1 \leq j \leq n$

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}.$$

Ασκήσεις

1. (Ασκηση 25 §5.1 Strang). Εάν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$, $n > 1$, και $a_{ij} = ij$, δείξτε ότι $\det A = 0$.
2. Να βρεθεί η τιμή του k για την οποία

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 - 3a_1 & 2b_2 - 3a_2 & 2b_3 - 3a_3 \\ 3c_1 - 4b_1 & 3c_2 - 4b_2 & 3c_3 - 4b_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Εάν

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m,$$

υπολογίστε τις ορίζουσες

$$(\alpha) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\gamma) \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\epsilon) \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(\beta) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 3a_3 \\ b_1 & b_2 & 3b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 9c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\delta) \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_2 \\ a_1 & a_3 & a_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(\zeta) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 & b_3 + a_3 \\ b_1 - c_1 & b_2 - c_2 & b_3 - c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Εάν A είναι ένα 3×3 μητρώο και $\det A = -2$ να υπολογισθούν οι ορίζουσες

$$(\alpha) \det(-3A)$$

$$(\gamma) \det((2A)^{-1})$$

$$(\epsilon) \det(2A(3A)^{-1})$$

$$(\beta) \det(2A^{-1})$$

$$(\delta) \det(2A(3A^{-1}))$$

$$(\zeta) \det(2A(3A)^T).$$

5. (Άσκηση 29 §5.1 Strang). Ποιο είναι το λάθος στην ακόλουθη απόδειξη ότι τα μητρώα προβολής P έχουν $\det P = 1$;

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T \quad \text{άρα} \quad |P| = |A| \frac{1}{|A||A^T|} |A^T| = 1.$$

6. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της ορίζουσας μόνο, δίχως να αναπτύξετε, υπολογίστε την

$$\begin{vmatrix} 111 & 211 & 311 & 411 \\ 112 & 212 & 312 & 412 \\ 113 & 213 & 313 & 413 \\ 114 & 214 & 314 & 414 \end{vmatrix}$$

7. Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός **αντιστρέψιμου** μητρώου είναι ίση με $\pm$ γινόμενο των οδηγών του μητρώου. **Υπόδειξη:** Βλέπε Παράδειγμα 4 Διάλεξη 10 και άνω-κάτω (LU) παραγοντοποίηση Διάλεξη 5.

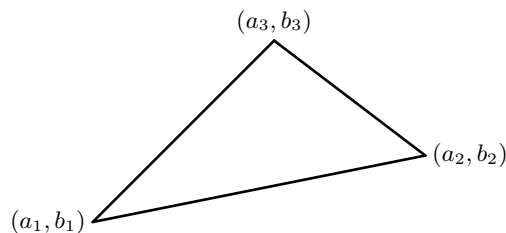
8. Εάν τα σημεία του επιπέδου (x_1, y_1) , (x_2, y_2) και (x_3, y_3) είναι συνευθειακά, δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Αποδείξτε ότι η εξίσωση της ευθείας η οποία περιέχει τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δίνεται με τη σχέση

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Εάν (a_1, b_1) , (a_2, b_2) και (a_3, b_3) είναι σημεία του θετικού ημιεπιπέδου ($y \geq 0$) όπως στο σχήμα δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία αυτά δίνεται από τη σχέση



$$E = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

11. **Η ορίζουσα Vandermonde.** Εάν x_1, x_2, x_3 είναι πραγματικοί αριθμοί δείξτε ότι

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1).$$

Γενικότερα αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι αριθμοί, αποδείξτε με επαγωγή ότι

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

Το σύμβολο $\prod$, είναι το αντίστοιχο του $\sum$, και δηλώνει το γινόμενο (product). Έτσι η ποσότητα στο δεξί μέλος της ισότητας είναι το γινόμενο των πρωτοβάθμιων όρων $(x_j - x_i)$ με $i < j$, βλέπε την 3×3 περίπτωση.

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε κάθε στήλη με x_1 και αφαιρέστε την από την επόμενη στήλη στα δεξιά. Δείξτε ότι

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = (x_n - x_1) \cdots (x_2 - x_1) V_{n-1}(x_2, \dots, x_n).$$

12. Υπολογίστε την ορίζουσα του $n \times n$ μητρώου

$$J_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix},$$

όπου τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδενικά.

Υπόδειξη: Διακρίνετε τις περιπτώσεις $n = \text{άρτιο}$ και $n = \text{περιττό}$.