

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10. Προβολές, Προσεγγίσεις, Ελάχιστα τετράγωνα

Ανασκόπηση

♦ **Το μητρώο της ορθογώνιας προβολής** Έστω $\mathbf{a}$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ και W ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

(1) Η προβολή ενός διανύσματος $\mathbf{u}$ επί του $\mathbf{a}$, $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ υλοποιείται μέσω του μητρώου

$$P = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} \quad \text{ώστε} \quad \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = P\mathbf{u}.$$

(2) Η προβολή ενός διανύσματος $\mathbf{u}$ επί του W , $\text{proj}_W \mathbf{u}$ υλοποιείται μέσω του μητρώου

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T \quad \text{ώστε} \quad \text{proj}_W \mathbf{u} = P\mathbf{u}, \quad (1)$$

όπου A είναι ένα μητρώο με στήλες τα διανύσματα μιας βάσης του W .

♦ Έστω P ένα μητρώο.

(1) Το P είναι μητρώο **προβολής** αν και μόνο αν $P = P^2$.

(2) Το P είναι μητρώο **ορθογώνιας προβολής** αν επιπλέον $P^T = P$.

♦ **Άσκηση 3 παρακάτω.** Εάν P είναι μητρώο ορθογώνιας προβολής στο $\mathbb{R}^m$ επί υπόχωρου W , τότε

- (1) $\text{range } P = W$.
- (2) $\text{range}(I - P) = W^\perp$.
- (3) $\text{range}(I - P) = \text{null } P$.
- (4) $\mathbb{R}^m = \text{range } P \oplus \text{null } P$ και $\text{range } P \perp \text{null } P$.

Ασκήσεις

1. Εάν για ένα $n \times n$ μητρώο A ισχύει $A^2 = A$ και $\text{rank } A = n$, δείξτε ότι $A = I$.
2. Έστω A ένα $n \times 3$ μητρώο του οποίου οι στήλες είναι ορθογώνιες.
 - (α) Εάν η κάθε στήλη έχει μέτρο 4, ποιο είναι το μητρώο $A^T A$;
 - (β) Εάν οι στήλες έχουν μέτρα 1, 2 και 3 αντίστοιχα, ποιο είναι το μητρώο $A^T A$;
3. (Άσκηση 17 §4.2 Strang.) Αν $P^2 = P$ δείξτε ότι $(I - P)^2 = I - P$. Όταν ο P προβάλλει επί του χώρου των στηλών του P , $\text{range } P$, ο $I - P$ προβάλλει επί του _____.
4. (Άσκηση 1 §4.2 Strang.) Προβάλλετε το $\mathbf{b} = (1 \ 2 \ 2)^T$ επί της ευθείας που διέρχεται από το $\mathbf{a} = (1 \ 1 \ 1)^T$.
5. (Άσκηση 3 §4.2 Strang.) Στην Άσκηση 4 βρείτε το μητρώο προβολής.

6. Να βρεθεί το μητρώο ορθογώνιας προβολής P επί του υπόχωρου W ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. Δίνονται τα διανύσματα

$$\mathbf{a}_1 = (-1 \ 2 \ -1)^T, \quad \mathbf{a}_2 = (2 \ 2 \ 2)^T.$$

- (α) Να βρεθούν τα μητρώα ορθογώνιας προβολής P_1 και P_2 αντίστοιχα επί των ευθειών δια των $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$.
- (β) Δείξτε ότι αν $\mathbf{u} \in \text{range } P_1$ και $\mathbf{v} \in \text{range } P_2$, τότε $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
- (γ) Υπολογίστε το γινόμενο $P_1 P_2$ και εξηγήστε γιατί είναι αυτό που είναι.
8. Σωστό ή Λάθος, κυκλώστε ανάλογα και δώστε μια σύντομη απάντηση.
Αν το A είναι ένα 3×3 **μητρώο ορθογώνιας προβολής** επί ενός διδιάστατου υπόχωρου W του $\mathbb{R}^3$, τότε
- (α) Το αντίστροφο μητρώο A^{-1} υπάρχει. Σ Λ
- (β) $\blacksquare \text{ range } A =$
- (γ) Το μητρώο $(A^T A)^{-1}$ υπάρχει. Σ Λ
- (δ) $\blacksquare \text{ null } A =$
- (ε) $\text{null}(A^2 - A) = \mathbb{R}^3$. Σ Λ
- (ς) $\blacksquare \dim(\text{null } A) =$
- (ζ) Το A είναι ορθογώνιο μητρώο. Σ Λ
- (η) $\blacksquare \text{rank } A =$
- (θ) Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις. Σ Λ
9. Αν $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a για τον οποίο η απόσταση $\|\mathbf{v} - a\mathbf{w}\|$ είναι η ελάχιστη δυνατή.
10. Να βρεθεί η πλησιέστερη ευθεία (των ελαχίστων τετραγώνων) στα σημεία $(0, 6)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$.