

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10. Προβολές, Προσεγγίσεις, Ελάχιστα τετράγωνα

Ανασκόπηση

♦ **Το μητρώο της ορθογώνιας προβολής** Έστω $\mathbf{a}$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ και W ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

(1) Η προβολή ενός διανύσματος $\mathbf{u}$ επί του $\mathbf{a}$, $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ υλοποιείται μέσω του μητρώου

$$P = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} \quad \text{ώστε} \quad \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = P\mathbf{u}.$$

(2) Η προβολή ενός διανύσματος $\mathbf{u}$ επί του W , $\text{proj}_W \mathbf{u}$ υλοποιείται μέσω του μητρώου

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T \quad \text{ώστε} \quad \text{proj}_W \mathbf{u} = P\mathbf{u}, \quad (1)$$

όπου A είναι ένα μητρώο με στήλες τα διανύσματα μιας βάσης του W .

♦ Έστω P ένα μητρώο.

(1) Το P είναι μητρώο **προβολής** αν και μόνο αν $P = P^2$.

(2) Το P είναι μητρώο **ορθογώνιας προβολής** αν επιπλέον $P^T = P$.

♦ **Άσκηση 3 παρακάτω.** Εάν P είναι μητρώο ορθογώνιας προβολής στο $\mathbb{R}^m$ επί υπόχωρου W , τότε

(1) $\text{range } P = W$.

(2) $\text{range}(I - P) = W^\perp$.

(3) $\text{range}(I - P) = \text{null } P$.

(4) $\mathbb{R}^m = \text{range } P \oplus \text{null } P$ και $\text{range } P \perp \text{null } P$.

Ασκήσεις

1. Εάν για ένα $n \times n$ μητρώο A ισχύει $A^2 = A$ και $\text{rank } A = n$, δείξτε ότι $A = I$.

2. Έστω A ένα $n \times 3$ μητρώο του οποίου οι στήλες είναι ορθογώνιες.

(α) Εάν η κάθε στήλη έχει μέτρο 4, ποιο είναι το μητρώο $A^T A$;

(β) Εάν οι στήλες έχουν μέτρα 1, 2 και 3 αντίστοιχα, ποιο είναι το μητρώο $A^T A$;

3. (Άσκηση 17 §4.2 Strang.) Αν $P^2 = P$ δείξτε ότι $(I - P)^2 = I - P$. Όταν ο P προβάλλει επί του χώρου των στηλών του P , $\text{range } P$, ο $I - P$ προβάλλει επί του _____.

4. (Άσκηση 1 §4.2 Strang.) Προβάλλετε το $\mathbf{b} = (1 \ 2 \ 2)^T$ επί της ευθείας που διέρχεται από το $\mathbf{a} = (1 \ 1 \ 1)^T$.

5. (Άσκηση 3 §4.2 Strang.) Στην Άσκηση 4 βρείτε το μητρώο προβολής.

6. Να βρεθεί το μητρώο ορθογώνιας προβολής P επί του υπόχωρου W ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. Δίνονται τα διανύσματα

$$\mathbf{a}_1 = (-1 \ 2 \ -1)^T, \quad \mathbf{a}_2 = (2 \ 2 \ 2)^T.$$

- (α') Να βρεθούν τα μητρώα ορθογώνιας προβολής P_1 και P_2 αντίστοιχα επί των ευθειών δια των $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$.
 (β') Δείξτε ότι αν $\mathbf{u} \in \text{range } P_1$ και $\mathbf{v} \in \text{range } P_2$, τότε $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
 (γ') Υπολογίστε το γινόμενο $P_1 P_2$ και εξηγήστε γιατί είναι αυτό που είναι.
8. Σωστό ή Λάθος, κυκλώστε ανάλογα και Δώστε μια σύντομη απάντηση.
 Αν το A είναι ένα 3×3 **μητρώο ορθογώνιας προβολής** επί ενός διδιάστατου υπόχωρου W του $\mathbb{R}^3$, τότε

(α) Το αντίστροφο μητρώο A^{-1} υπάρχει. Σ Λ

(β) $\blacksquare \text{ range } A =$

(γ') Το μητρώο $(A^T A)^{-1}$ υπάρχει. Σ Λ

(δ) $\blacksquare \text{ null } A =$

(ε) $\text{null}(A^2 - A) = \mathbb{R}^3$. Σ Λ

(ς) $\blacksquare \dim(\text{null } A) =$

(ζ) Το A είναι ορθογώνιο μητρώο. Σ Λ

(η) $\blacksquare \text{rank } A =$

(θ) Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις. Σ Λ

9. Αν $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a για τον οποίο η απόσταση $\|\mathbf{v} - a\mathbf{w}\|$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

10. Να βρεθεί η πλησιέστερη ευθεία (των ελαχίστων τετραγώνων) στα σημεία $(0, 6)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$.

ΛΥΣΕΙΣ

1. Αφού $\text{rank } A = n$ έπεται ότι το A^{-1} υπάρχει, και από την υπόθεση $A^2 = A$ βρίσκουμε

$$A^2 - A = O \Rightarrow A(A - I) = O \Rightarrow A^{-1}A(A - I) = A^{-1}O \Rightarrow A - I = O$$

κατά συνέπεια $A = I$.

2. Αν $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$, με $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$, αν $i \neq j$, και $\|\mathbf{a}_j\| = 4$. Έτσι

$$A^T A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

3. Αν το P είναι ένα $n \times n$ μητρώο ορθογώνιας προβολής τότε $P^2 = P$ και $P^T = P$, βλέπε (1). Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x} + \mathbf{x} - P\mathbf{x} = P\mathbf{x} + (I - P)\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n = \text{range}(P) + \text{range}(I - P),$$

επιπλέον

$$\mathbb{R}^n = \text{range}(P) \oplus \text{range}(P)^\perp$$

$$\mathbb{R}^n = \text{range}(P) \oplus \text{null}(P^T) = \text{range}(P) \oplus \text{null}(P)$$

με

$$\text{range}(P)^\perp = \text{null}(P^T) = \text{null}(P).$$

Δείχνουμε ότι $\text{range}(I - P) = \text{range}(P)^\perp$. Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned} \langle P\mathbf{u}, (I - P)\mathbf{v} \rangle &= \langle P^2\mathbf{u}, (I - P)\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle P\mathbf{u}, P^T(I - P)\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle P\mathbf{u}, P(I - P)\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle P\mathbf{u}, (P - P^2)\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle P\mathbf{u}, (P - P)\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle P\mathbf{u}, P\mathbf{v} \rangle - \langle P\mathbf{u}, P\mathbf{v} \rangle \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

για όλα τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του $\mathbb{R}^n$, γεγονός που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. Επομένως

$$\text{range}(I - P) = \text{range}(P)^\perp = \text{null}(P^T) = \text{null}(P)$$

ισοδύναμα το $I - P$ προβάλλει επί του μηδενόχωρου του P .

8. Το μητρώο A προβάλλει επί του επιπέδου W (διδιάστατου υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$), ισοδύναμα για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $A\mathbf{x} \in W$, κατά συνέπεια

(α) Το αντίστροφο μητρώο A^{-1} υπάρχει.

Σ (Λ)

Το A προβάλλει επί του επιπέδου W που είναι διδιάστος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, επομένως $\dim C(A) = 2$, ισοδύναμα το A έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, κατά συνέπεια το A^{-1} δεν υπάρχει.

(β) ■ $\text{range } A = W$.

$$\text{range } A = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} = C(A) = W, \text{ βλέπε (α')}. \quad \blacksquare$$

(γ) Το μητρώο $(A^T A)^{-1}$ υπάρχει.

Σ (Λ)

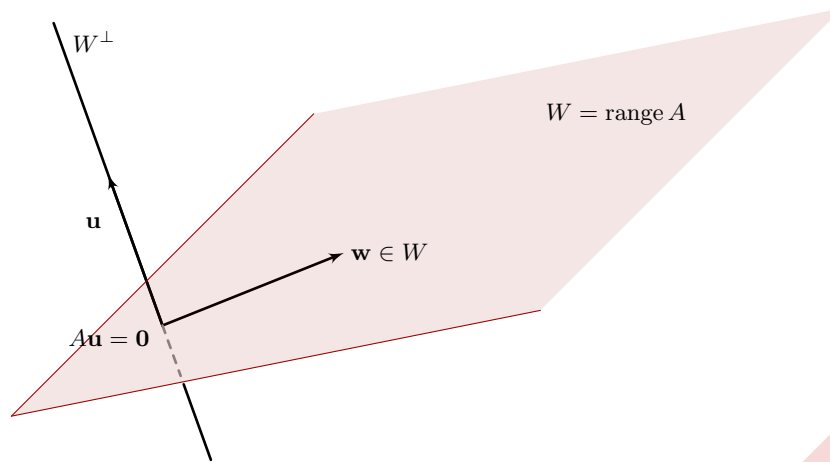
Στην Άσκηση 6. βρήκαμε ότι το μητρώο προβολής επί του $W = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ είναι το

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επειδή $A^2 = A$ (ως μητρώο προβολής) και $A^T = A$ (ορθογώνια προβολή) έχουμε

$$A^T A = A^2 = A$$

επομένως το A^{-1} δεν υπάρχει, το A έχει δύο ίσες στήλες.



(δ) ■ $\text{null } A = W^\perp$

Η ευθεία $W^\perp$ προβάλλεται μέσω του A στο διάνυσμα $\mathbf{0}$. Επιπλέον κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ γράφεται ως $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$, όπου $\mathbf{w} \in W$ και $\mathbf{w}^\perp \perp \mathbf{w}$ αφού $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$, έτσι

$$A\mathbf{x} = A(\mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp) = A\mathbf{w} + A\mathbf{w}^\perp = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w},$$

κατά συνέπεια $\mathbf{x} \in \text{null } A$ αν και μόνο αν δεν έχει W -συνιστώσα, ισοδύναμα $\mathbf{x} \in W^\perp$.

(ε) $\text{null}(A^2 - A) = \mathbb{R}^3$.

⊗ Λ

Αν $\mathbf{x} \in \text{null}(A^2 - A)$, τότε $(A^2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, το οποίο ισχύει για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ αφού το A είναι μητρώο προβολής ($A^2 = A$).

(ς) $\dim(\text{null } A) = 1$

Βλέπε (δ).

(ζ) Το A είναι ορθογώνιο μητρώο.

Σ ⊗

(η) ■ $\text{rank } A = \dim(\text{range } A) = \dim(W) = 2$.

(θ) Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις.

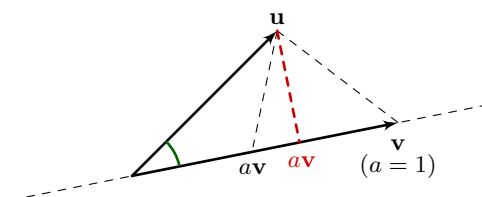
⊗ Λ

Για κάθε $\mathbf{u} \in W^\perp$ είναι $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

9. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του $\mathbb{R}^3$, όπως στο σχήμα, βρίσκουμε τον πραγματικό αριθμό a για τον οποίο η απόσταση μεταξύ $\mathbf{u}$ και $a\mathbf{v}$ είναι η ελάχιστη δυνατή, ισοδύναμα βρίσκουμε το

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|$$

Η γεωμετρική ματιά: Αν το a διατρέχει τους πραγματικούς αριθμούς το $a\mathbf{v}$ διατρέχει την



ευθεία που παράγει το $\mathbf{v}$ (μονοδιάστατο διανυσματικό χώρο). Απ' όλα τα τρίγωνα με "πλευρές" $\mathbf{u}$, $a\mathbf{v}$ και $\mathbf{u} - a\mathbf{v}$ εκείνο του οποίου η $\mathbf{u} - a\mathbf{v}$ είναι η ελάχιστη δυνατή είναι το ορθογώνιο με

υποτείνουσα το $\mathbf{u}$, δηλαδή όταν $\mathbf{u} - a\mathbf{v} \perp a\mathbf{v}$, ισοδύναμα όταν το $a\mathbf{v}$ είναι η προβολή του $\mathbf{u}$ επί της ευθείας δια του $\mathbf{v}$. Έτσι από το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\|a\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \Rightarrow a^2\|\mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u} - a\mathbf{v}, \mathbf{u} - a\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 \\ &\Rightarrow a^2\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - 2a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + a^2\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \\ &\Rightarrow 2a(a\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = 0 \\ &\Rightarrow a = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \quad (a \neq 0).\end{aligned}$$

Η γραμμοαλγεβρική ματιά: Όπως είδαμε και παραπάνω θέλουμε

$$\begin{aligned}a\mathbf{v} &= \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \rangle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad (\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| \text{ μοναδιαίο}) \\ &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}\end{aligned}$$

οπότε $a = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle / \|\mathbf{v}\|^2$, όπως βρήκαμε με τη γεωμετρική προσέγγιση. Βλέπε Διάλεξη 10, Θεώρημα 3, ή Παρατήρηση 2.

Χρησιμοποιώντας τεχνικές Απειροστικού Λογισμού: Επειδή

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} - a\mathbf{v}, \mathbf{u} - a\mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + a^2\|\mathbf{v}\|^2 \\ &= f(a)\end{aligned}$$

(κυρτή παραβολή) το ελάχιστο της f συμβαίνει εκεί που μηδενίζεται η παράγωγος, ισοδύναμα

$$f'(a) = -2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + 2a\|\mathbf{v}\|^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

10. Σημείωση: Αν τα σημεία (x_j, y_j) , $j = 1, 2, 3$, είναι σημεία της ευθείας $y = \alpha + \beta x$, τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Για τα δεδομένα υπολογίζουμε

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

και

$$A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

οπότε από την κανονική εξίσωση βρίσκουμε

$$A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$

ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

οπότε η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων είναι η $y = 5 - 3x$.