

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9. Τάξη μητρώου, Υπόχωροι παραγόμενοι από μητρώο

Ασκήσεις

1. (Σεπτέμβριος 2019) Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (α) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών του A .
(β) Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο του A .
(γ) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο γραμμών του A .

2. Θεωρούμε το σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$$

με b να είναι μια πραγματική παράμετρος.

- (α) Είναι το μητρώο A αντιστρέψιμο;
(β) Να βρεθούν ο χώρος στηλών, ο χώρος γραμμών και ο μηδενόχωρος του A .
(γ) Για ποιά b το σύστημα έχει λύση ή λύσεις;
3. (Ιούνιος 2018) ΕΠΙΛΕΞΤΕ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΣΤΕ ΑΝΑΛΟΓΑ. Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Η τάξη του, $\text{rank } A$, είναι:

1 2 3

4. (Σεπτέμβριος 2018) ΜΑΥΡΙΣΤΕ ΑΝ Η ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΙΝΑΙ ΑΛΗΘΗΣ. Για $A \in \mathbb{R}^{n \times 5}$ θεωρούμε το σύστημα $Ax = b$

- ☐ Αν $\text{rank } A = n$, τότε $n < 5$.
☐ Αν $\text{rank } A = 5$, τότε $\text{range } A = \mathbb{R}^n$.
☐ Αν το σύστημα έχει λύση για κάθε b , τότε $5 \geq n$.
☐ Αν για $b = 0$ είναι $x = 0$, τότε $\text{rank } A \geq 5$.

5. (Ιούνιος 2019) Εάν R είναι η **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** για το A , όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (α) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών του A .

(β) Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο του A .

(γ) Να βρεθεί η λύση του συστήματος $Ax = 0$.

6. Για το μητρώο A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(α) Να βρεθεί μια βάση $\mathcal{B}_C$ για τον χώρο στηλών $\text{range } A$ του A .

(β) Να βρεθεί μια βάση $\mathcal{B}_N$ για τον μηδενόχωρο $\text{null } A$ του A .

(γ) Να βρεθεί μια βάση $\mathcal{B}_R$ για τον χώρο γραμμών $\text{range } A^T$ του A .

(δ) Να βρεθεί η διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου $\text{null } A^T$.

(ε) Χρησιμοποιήστε το Θεμελιώδες Θεώρημα για να βρείτε βάσεις για το $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^3$ επεκτείνοντας τις ήδη υπάρχουσες.

(ς) Αν

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος $Ax = b$.

Λύσεις

1.

2. Η **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** (ακμ) του A περιέχει και παρέχει τις πληροφορίες που μας ενδιαφέρουν. Θεωρούμε λοιπόν το επαυξημένο μητρώο $(A \ b)$ και εφαρμόζουμε τη διαδικασία της απαλοιφής

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & b+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix} = (R_0 \ b'). \quad (1)$$

Με c_j και c'_j , $j = 1, 2, 3$ συμβολίζουμε τις στήλες του A και R_0 , αντίστοιχα, και με r_j και r'_j , $j = 1, 2, 3$ τις γραμμές του A και R_0 .

(α) Στο R_0 (ακμ) βλέπουμε δύο οδηγούς. Τι σημαίνει ή τι συνεπάγεται αυτό το αποτέλεσμα;

(i) Το R_0 άρα και το A έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες

$$2c'_1 + c'_2 = c'_3 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = c_3$$

άρα το A δεν αντιστρέφεται.

(ii) Το R_0 έχει μια μηδενική γραμμή, άρα αν ξεκινούσαμε από το μητρώο $(A \ I)$ δεν θα μπορούσαμε ποτέ με απαλοιφή να καταλήξουμε σ' ένα μητρώο $(I \ B)$, κατά συνέπεια τέτοιο B , το αντίστροφο του A^{-1} , δεν υπάρχει.

(iii) $R_0 \neq I$, ισοδύναμα το A δεν είναι γραμμοϊσοδύναμο με το ταυτοτικό μητρώο I , επομένως το A^{-1} δεν υπάρχει.

(β) Από το (α') **ο χώρος στηλών** του A παράγεται από τις δύο πρώτες στήλες του δηλαδή από τα διανύσματα c_1 και c_2 , τα οποία αποτελούν και μια βάση του, έτσι

$$C(A) = \text{range } A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Το R_0 έχει μια μηδενική γραμμή, την τρίτη, άρα τόσο το R_0 όσο και το A έχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές, δηλαδή υπάρχουν σταθερές λ_1, λ_2 ώστε

$$\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3.$$

(Η ισότητα ισχύει για $\lambda_1 = -7$ και $\lambda_2 = 3$.) Έτσι **ο χώρος γραμμών** του A είναι

$$R(A) = C(A^T) = \text{range } A^T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Για τον μηδενόχωρο του A λύνουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ισοδύναμο το $R_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, έτσι αν $\mathbf{x} = (x \ y \ z)^T$, το

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases} \quad \text{έτσι} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια **ο μηδενόχωρος** του A είναι

$$\text{null } A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(γ') Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση **αν και μόνο αν** $\mathbf{b} \in C(A)$, ισοδύναμο υπάρχουν λ, μ ώστε

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda + \mu \\ -\lambda + 3\mu \end{pmatrix}$$

απ' όπου βλέπουμε ότι $\lambda = \mu = 1$ και $b = 2$. Έτσι το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν $b = 2$.

Σημειώνουμε ότι την τελευταία αυτή πληροφορία την παίρνουμε από την (1), σύμφωνα με ό,τι ξέρουμε από την επίλυση συστημάτων.

♠ Να βρεθεί **η γενική λύση** του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Από την (1), για $b = 2$, παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = 1 - z \end{cases}$$

έτσι αν $\mathbf{x} = (x \ y \ z)^T$ είναι λύση, τότε

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2z \\ 1 - z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$$

Έτσι η **γενική λύση του συστήματος** $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Το τμήμα

$$\mathbf{x}_0 = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι η γενική λύση του ομοιογενούς συστήματος $Ax = 0$, και το

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

είναι μια ειδική λύση του συστήματος $Ax = b$.

Για σταθερό t , έστω $t = 3$, το

$$x = 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

είναι μια επίσης (ειδική) λύση του $Ax = b$. Πράγματι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = b.$$

♣ Να βρεθεί ο αριστερός μηδενόχωρος του A .

Η διαδικασία της απαλοιφής υλοποιείται μέσω του πολλαπλασιασμού με στοιχειώδη μητρώα ως

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = R_0$$

απ' όπου πολλαπλασιάζοντας βρίσκουμε $LA = R_0$, όπου

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι με αναστροφή παίρνουμε $(LA)^T = R_0^T$, ισοδύναμα

$$A^T L^T = A^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι η τρίτη στήλη του L^T πολλαπλασιασμένη από αριστερά με το A^T δίνει τη μηδενική στήλη του R_0^T , κατά συνέπεια ο **αριστερός μηδενόχωρος** του A είναι

$$\text{null } A^T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Οι τρεις στήλες του μητρώου είναι ίσες επομένως το A έχει μία γραμμικά ανεξάρτητη στήλη, ισοδύναμα $\text{rank } A = 1$. Διαφορετικά, οι γραμμές του A είναι πολλαπλάσια της γραμμής με 1 παντού, οπότε $\text{rank } A = 1$.

4. Έστω $A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_5)$ όπου $a_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots, 5$, τότε έχουμε

$$R(A) \subseteq \mathbb{R}^5, \quad C(A) = \text{range } A \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{rank } A \leq \min\{5, n\}$$

όπου $\text{rank } A = \dim R(A) = \dim C(A)$.

□ Αν $\text{rank } A = n$, τότε $n \leq 5$.

□ Αν $\text{rank } A = 5$, τότε $5 \leq n$ και $\dim(\text{range } A) = 5$, κατά συνέπεια η εικόνα $\text{range } A$ είναι ένας 5-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

■ Αν το σύστημα έχει λύση για κάθε $\mathbf{b}$, τότε κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ανήκει στο χώρο στηλών του A , επομένως $\mathbb{R}^n \subseteq C(A)$, ισοδύναμα $n \leq \dim C(A) \leq 5$.

Δεδομένου ότι $C(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, ισοδύναμα $\dim C(A) \leq n$, έπεται, τελικά, ότι $\text{rank } A = n$, οπότε $n \leq 5$, έτσι $\mathbb{R}^n = C(A) = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_5\}$.

■ Αν για $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ είναι $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, τότε ισοδύναμα έχουμε ότι

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_5 \mathbf{a}_5 = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

ισοδύναμα οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, επομένως $n \geq 5$ και $\text{rank } A = 5$ άρα θα ισχύει ότι $\text{rank } A \geq 5$.

5.

6. Βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R_0 του μητρώου

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(α) Οι δύο πρώτες στήλες του R_0 είναι αυτές που περιέχουν τους οδηγούς, κατά συνέπεια μια βάση για το χώρο στηλών του A αποτελούν οι δύο πρώτες στήλες του A , έτσι

$$\mathcal{B}_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

(β) Τα μητρώα A και R_0 είναι γραμμοϊσοδύναμα, επομένως τα συστήματα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και $R_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι ισοδύναμα. Επιλύοντας το $R_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ βρίσκουμε

$$\begin{cases} x_1 - 11x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 11x_3 - x_4 \\ x_2 = -4x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

έτσι αν $\mathbf{x} \in \text{null } A$, τότε

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11x_3 - x_4 \\ -4x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ισοδύναμα

$$\text{null } A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

και επειδή τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα έπεται ότι μια βάση για τον μηδενόχωρο είναι η

$$\mathcal{B}_N = \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(γ) Οι δύο πρώτες γραμμές του R_0 είναι αυτές που περιέχουν τους οδηγούς, κατά συνέπεια μια βάση για το χώρο γραμμών του A αποτελούν οι δύο πρώτες γραμμές του A ή του R_0 , έτσι

$$\mathcal{B}_R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Μια άλλη βάση για το χώρο γραμμών του A αποτελείται από τις δύο πρώτες γραμμές του A , έτσι

$$\mathcal{B}'_R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

κατά συνέπεια $\text{span } \mathcal{B}_R = \text{span } \mathcal{B}'_R$. Το ανάλογο αποτέλεσμα ΔΕΝ ισχύει για τον χώρο στηλών. Γιατί; Μήπως επειδή κατά την διαδικασία της απαλοιφής χρησιμοποιούμε γραμμικούς συνδυασμούς των γραμμών μόνο;

(δ) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 = \text{null } A^T \oplus \text{range } A &\Rightarrow \dim(\text{null } A^T) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{range } A) \\ &= 3 - 2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(ε) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα έχουμε

i . αφενός ότι

$$\mathbb{R}^4 = \text{null } A \oplus \text{range } A^T, \quad \text{και} \quad (\text{range } A^T)^\perp = \text{null } A,$$

όπου $\text{range } A^T = C(A^T) = R(A)$. Έτσι μια βάση $\mathcal{B}_4$ για το $\mathbb{R}^4$ είναι η

$$\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_N \cup \mathcal{B}_R = \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Παρατηρήστε ότι τα δύο πρώτα διανύσματα της βάσης είναι ορθογώνια στα δύο τελευταία.

ii . και αφετέρου

$$\mathbb{R}^3 = \text{null } A^T \oplus \text{range } A, \quad \text{και} \quad (\text{range } A)^\perp = \text{null } A^T,$$

όπου $\text{range } A = C(A)$. Έτσι μια βάση $\mathcal{B}_3$ για το $\mathbb{R}^3$, μέσω των (α') και (δ'), είναι η

$$\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_C \cup \mathcal{B}_{N^T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{n} \right\},$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι ορθογώνιο στα δύο πρώτα. Έτσι αν $\mathbf{n} = (x \ y \ z)^T$ θα πρέπει να ισχύει

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a και για όλους τους πραγματικούς αριθμούς b , ισοδύναμα

$$\begin{aligned} (a + 2b)x + (a + 4b)y + (2a + 6b)z &= 0 \Leftrightarrow \\ a(x + y + 2z) + b(2x + 4y + 6z) &= 0 \end{aligned}$$

για όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών a και b , κατά συνέπεια θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

έτσι παίρνοντας ως $\mathbf{n} = (1 \ 1 \ -1)^T$ μια βάση για το $\mathbb{R}^3$ είναι η

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Επαληθεύστε ότι $A\mathbf{n} = \mathbf{0}$.

(ς') Διαμορφώνοντας το επαυξημένο μητρώο $(A \ \mathbf{b})$ με απαλοιφή βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

επομένως η γενική λύση $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$ είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 11x_3 - 6x_4 \\ -4x_3 + 2x_4 + 1/2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11x_3 \\ -4x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6x_4 \\ 2x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= x_3 \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο διάνυσμα στην έκφραση του $\mathbf{x}$ είναι μια **ειδική λύση** $\mathbf{x}_p$ του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, αφού το επαληθεύει, ενώ τα δύο πρώτα αποτελούν τη βάση του μηδενόχωρου $\text{null } A$, άρα ο συνδυασμός είναι η **γενική λύση** $\mathbf{x}_0$ του ομοιογενούς συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ επιβεβαιώνοντας ότι η γενική λύση $\mathbf{x}$ του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p.$$