

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8. Ορθογώνιο συμπλήρωμα, Ορθοκανονικοποίηση, Ορθογώνια μητρώα

Ανασκόπηση

- ♦ **Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt:** Αν σε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$ το $S = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \}$ είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων, τότε η ακολουθία των διανυσμάτων που ορίζονται με τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\ \mathbf{w}_k &= \frac{\mathbf{u}_k - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 - \dots - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k-1} \rangle \mathbf{w}_{k-1}}{\|\mathbf{u}_k - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 - \dots - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k-1} \rangle \mathbf{w}_{k-1}\|}, \end{aligned} \quad (1)$$

$k = 2, \dots, n$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο στο X το οποίο παράγει τον ίδιο υπόχωρο με το S . Ειδικά αν το S είναι μια βάση του X , το $\{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για τον X .

- ♦ Ένα τετραγωνικό μητρώο Q λέγεται **ορθογώνιο** αν οι στήλες του είναι ορθοκανονικά διανύσματα, ισοδύναμα αν

$$Q^T Q = Q Q^T = I,$$

ισοδύναμα αν $Q^T = Q^{-1}$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Έστω $0 < \alpha < 1$.

(α') Δείξτε ότι το

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \alpha x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

(β') Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του S .

(γ') Δείξτε ότι $\mathbb{R}^2 = S \oplus S^\perp$, επιβεβαιώνοντας το Θεώρημα 2.

(δ') Επιβεβαιώστε το Πόρισμα 1.

3. Εάν

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^\perp$ καθώς και μια βάση του $S^\perp$.

4. Αν

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση για τον $W = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

5. Εξετάστε αν το άθροισμα ορθογωνίων μητρώων είναι ορθογώνιο.

6. Εξετάστε αν το γινόμενο ορθογωνίων μητρώων είναι ορθογώνιο.

7. Αν

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορίζουμε το μητρώο $Q = I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T$.

(α') Δείξτε ότι το μητρώο Q είναι ορθογώνιο.

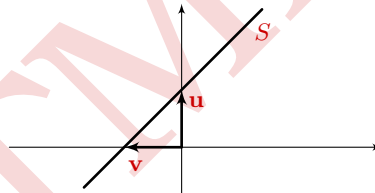
(β') Δείξτε ότι το μητρώο Q ικανοποιεί τη σχέση $Q^2 = I$.

(γ') Ανακλά κάθε διάνυσμα ως προς την ευθεία η οποία είναι ορθογώνια στο $\mathbf{q}$, δηλαδή κατά μήκος του

$$\mathbf{q}^\perp = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

ΛΥΣΕΙΣ

1. Το υποσύνολο S δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ γιατί δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα, ισοδύναμα δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x = x + 1 = 0$. Το S παριστάνει την ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$. Τα



Σχήμα 1: Άσκηση 1.

διανύσματα

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix},$$

όπου x είναι τυχαιός πραγματικός αριθμός, είναι στοιχεία του S . Έτσι αν $\boldsymbol{\xi} = (a \ b)^T \in S^\perp$, θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\xi} &= 0 \Leftrightarrow xa + (x+1)b = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)x + b = 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση παριστάνει ένα πολυώνυμο το οποίο για όλες τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής παίρνει την τιμή μηδέν, συνεπώς το πολυώνυμο αυτό είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε θα πρέπει

$$a + b = 0 \quad \text{και} \quad b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0,$$

κατά συνέπεια $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, ισοδύναμα $S^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

2. (α) Αν $\mathbf{u}$ είναι στοιχείο του S , τότε για κάποιο πραγματικό αριθμό x είναι

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια

$$S = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}\right\}$$

ισοδύναμα το S είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

(β) Αν $\xi = (p \ q)^T \in S^\perp$, θα πρέπει

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow p + q\alpha = 0 \Leftrightarrow q = -\frac{p}{\alpha}$$

επομένως

$$\xi = \begin{pmatrix} p \\ -p/\alpha \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow S^\perp = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/\alpha \end{pmatrix}\right\}$$

Παρατηρείστε ότι τόσο το S όσο και το $S^\perp$ παριστάνουν ευθείες που είναι κάθετες μεταξύ τους, και το γινόμενο των κλίσεών τους είναι ίσο με -1 .

(γ) Δείχνουμε ότι για πραγματικούς αριθμούς x, y υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ, μ ώστε

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \alpha\lambda - (1/\alpha)\mu = y \end{cases}$$

απ' όπου επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$\lambda = \frac{1}{\alpha^2 + 1}x + \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}y, \quad \mu = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1}x - \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}y.$$

(δ) (Πόρισμα 1. $\dim S^\perp = \dim X - \dim S$) Πράγματι

$$\dim S^\perp = 2 - \dim S = 2 - 1 = 1.$$

3. Αν $(p \ q \ r \ s)^T$ είναι στοιχείο του $S^\perp$, τότε

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = xp + yq + xr + ys = (p + r)x + (q + s)y = 0$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και όλους τους πραγματικούς αριθμούς y . Από την τελευταία σχέση για $x = 1$ και $y = 0$ έπεται ότι

$$p + r = 0 \Rightarrow r = -p$$

ενώ για $x = 0$ και $y = 1$ έπεται ότι

$$q + s = 0 \Rightarrow s = -q,$$

κατά συνέπεια

$$S^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ -y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

κατά συνέπεια

$$S^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Επειδή τα δύο τελευταία διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα έπεται ότι αποτελούν μια βάση για τον υπόχωρο $S^\perp$, οπότε μια βάση για τον υπόχωρο είναι η

$$\mathcal{B}_{S^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Ακολουθώντας τη διαδικασία ορθοκανονικοποίησης υπολογίζουμε $\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{2}$, οπότε

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_1$, και υπολογίζουμε

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + 1 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

και

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

οπότε

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Έτσι μια ορθοκανονική βάση για τον υπόχωρο $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ είναι η $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

Σημειώνουμε ότι αν $\mathbf{u} \in \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 = x\sqrt{2}\mathbf{w}_1 + y\left(\mathbf{v}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_1\right) \\ &= \left(x\sqrt{2} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{w}_1 + y\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

ισοδύναμα

$$\mathbf{u} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} = \left(x\sqrt{2} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{w}_1 + y\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_2.$$

5. (Διαφορετική από αυτή που έγινε στην τάξη.) Τα μητρώα

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνια, αλλά το

$$Q_1 + Q_2 = \begin{pmatrix} 2\cos \theta & 0 \\ 2\sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

προφανώς δεν είναι, οι στήλες είναι μεν κάθετες μεταξύ τους, αλλά η νόρμα της πρώτης είναι ίση με 2 και της δεύτερης 0.

Όμοια τα $2Q_1 = Q_1 + Q_1$ και $2Q_2$ δεν είναι ορθογώνια.

6. Αν Q_1 και Q_2 είναι ορθογώνια και $Q = Q_1 Q_2$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
 QQ^T &= Q_1 Q_2 (Q_1 Q_2)^T \\
 &= Q_1 Q_2 Q_2^T Q_1^T && (\text{ιδιότητα της αναστροφής}) \\
 &= Q_1 I Q_1^T && (Q_2 Q_2^T = Q_2^T Q_2 = I) \\
 &= Q_1 Q_1^T \\
 &= I && (Q_1 Q_1^T = Q_1^T Q_1 = I)
 \end{aligned}$$

κατά συνέπεια το Q είναι ορθογώνιο.

7. Βλέπε Διάλεξη 8, Παράδειγμα 6, σελίδες 30-32. Εδώ $Q = I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T$.

(α) Δείχνουμε ότι $QQ^T = I$. Πράγματι

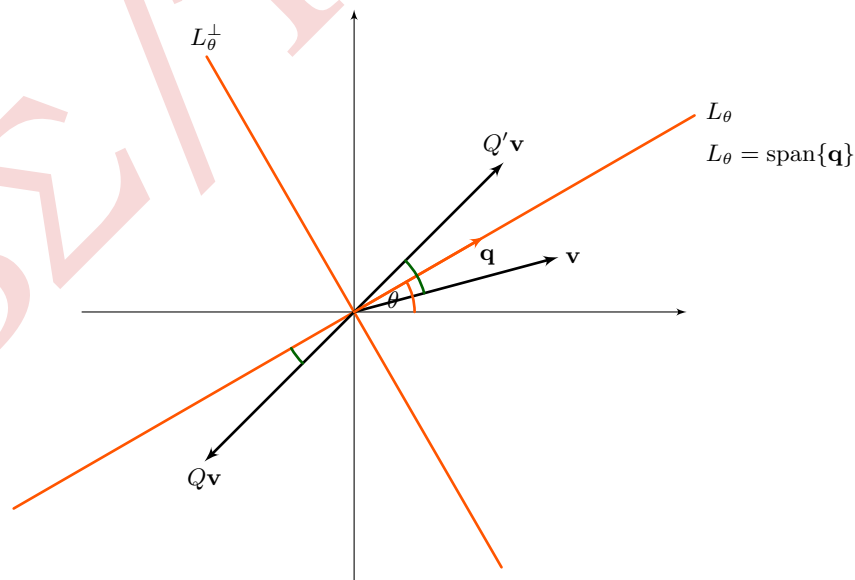
$$\begin{aligned}
 QQ^T &= (I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T)(I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T)^T \\
 &= (I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T)(I^T - (2\mathbf{q}\mathbf{q}^T)^T) \\
 &= (I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T)(I - 2(\mathbf{q}^T)^T \mathbf{q}^T) \\
 &= (I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T)(I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T) = Q^2 \\
 &= I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 4\mathbf{q}\mathbf{q}^T \mathbf{q}\mathbf{q}^T \\
 &= I - 4\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 4\mathbf{q}\mathbf{q}^T && (\mathbf{q}^T \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|^2 = 1) \\
 &= I.
 \end{aligned}$$

(β) Κατά τη διαδικασία της απόδειξης στο (α) δείξαμε ότι $QQ^T = Q^2 = I$.

(γ) Στο Παράδειγμα 6, Διάλεξη 8 δείξαμε ότι το μητρώο $Q' = 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - I$ ανακλά κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$ ως προς την ευθεία που παράγει το $\mathbf{q}$. Επειδή $Q = -Q'$ έπεται ότι

$$Q\mathbf{v} = -Q'\mathbf{v}$$

κατά συνέπεια το μητρώο Q ανακλά το διάνυσμα $\mathbf{v}$ ως προς το ορθογώνιο συμπλήρωμα της ευθείας $L_\theta = \text{span}\{\mathbf{q}\}$, βλέπε Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Άσκηση 7.