

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8. Ορθογώνιο συμπλήρωμα, Ορθοκανονικοποίηση, Ορθογώνια μητρώα

### Ανασκόπηση

- ♦ **Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt:** Αν σε χώρο  $X$  με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και επαγόμενη νόρμα  $\| \cdot \|$  το  $S = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \}$  είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων, τότε η ακολουθία των διανυσμάτων που ορίζονται με τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\ \mathbf{w}_k &= \frac{\mathbf{u}_k - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 - \dots - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k-1} \rangle \mathbf{w}_{k-1}}{\|\mathbf{u}_k - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 - \dots - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k-1} \rangle \mathbf{w}_{k-1}\|}, \end{aligned} \quad (1)$$

$k = 2, \dots, n$  είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο στο  $X$  το οποίο παράγει τον ίδιο υπόχωρο με το  $S$ . Ειδικά αν το  $S$  είναι μια βάση του  $X$ , το  $\{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \}$  είναι μια ορθοκανονική βάση για τον  $X$ .

- ♦ Ένα τετραγωνικό μητρώο  $Q$  λέγεται **ορθογώνιο** αν οι στήλες του είναι ορθοκανονικά διανύσματα, ισοδύναμα αν

$$Q^T Q = Q Q^T = I,$$

ισοδύναμα αν  $Q^T = Q^{-1}$ .

### Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποσυνόλου του  $\mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Έστω  $0 < \alpha < 1$ .

(α') Δείξτε ότι το

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \alpha x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

είναι υπόχωρος του  $\mathbb{R}^2$ .

(β') Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $S$ .

(γ') Δείξτε ότι  $\mathbb{R}^2 = S \oplus S^\perp$ , επιβεβαιώνοντας το Θεώρημα 2.

(δ') Επιβεβαιώστε το Πόρισμα 1.

3. Εάν

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα  $S^\perp$  καθώς και μια βάση του  $S^\perp$ .

4. Αν

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση για τον  $W = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ .

5. Εξετάστε αν το άθροισμα ορθογωνίων μητρώων είναι ορθογώνιο.

6. Εξετάστε αν το γινόμενο ορθογωνίων μητρώων είναι ορθογώνιο.

7. Αν

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορίζουμε το μητρώο  $Q = I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T$ .

(α) Δείξτε ότι το μητρώο  $Q$  είναι ορθογώνιο.

(β) Δείξτε ότι το μητρώο  $Q$  ικανοποιεί τη σχέση  $Q^2 = I$ .

(γ) Ανακλά κάθε διάνυσμα ως προς την ευθεία η οποία είναι ορθογώνια στο  $\mathbf{q}$ , δηλαδή κατά μήκος του

$$\mathbf{q}^\perp = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$