

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ με ΛΥΣΕΙΣ 07. Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

### Ανασκόπηση

- ♦ **Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν  $X$  είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και νόρμα που ορίζεται με τη σχέση  $\| \cdot \| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$  (**επαγόμενη νόρμα**), τότε

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

για όλα τα διανύσματα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  του  $X$ . Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  είναι γραμμικά εξαρτημένα.

- ♦ **Το Πυθαγόρειο Θεώρημα.** Έστω  $X$  ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και επαγόμενη νόρμα  $\| \cdot \|$ . Εάν  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  είναι διανύσματα του  $X$  ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, δηλαδή  $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ , αν  $i \neq j$ , τότε

$$\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_n\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + \dots + \|\mathbf{u}_n\|^2.$$

- ♦ **Ο νόμος του παραλληλογράμμου.** Έστω  $X$  ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και επαγόμενη νόρμα  $\| \cdot \|$ . Δείξτε ότι

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$$

για όλα τα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$  στο  $X$ .

### Ασκήσεις

- Σε κάθε διανυσματικό χώρο  $X$  με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ισχύουν  
(α) Εάν για κάποιο  $\mathbf{u} \in X$  είναι  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0$  για κάθε  $\mathbf{x} \in X$ , τότε  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .  
(β)  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0$  για κάθε  $\mathbf{u} \in X$ .
- Εάν  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^3$ , και  $A$  είναι ένα αντιστρέψιμο  $3 \times 3$  μητρώο δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^3$ . Σημειώνουμε ότι

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^T A\mathbf{v} = \mathbf{u}^T A^T A\mathbf{v}.$$

- Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz. **Υπόδειξη:** Από την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

ισοδύναμα

$$\|\mathbf{v}\|^2 t^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$$

για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ . Τι μπορεί να ειπωθεί για την διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου;

4. Έστω  $X$  ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και επαγόμενη νόρμα  $\| \cdot \|$ . Αν  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  είναι ορθογώνια διανύσματα του  $X$  δείξτε ότι

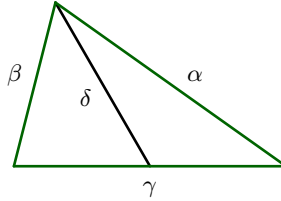
$$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|.$$

5. Αποδείξτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τρία διανύσματα. **Υπόδειξη:**

$$\| \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \|^2 = \langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \rangle.$$

6. Αποδείξτε το νόμο του παραλληλογράμμου.

7. Για το τρίγωνο του σχήματος χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο αποδείξτε το Θεώρημα του



Απολλωνίου:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2} + 2\delta^2,$$

όπου  $\delta$  είναι το μήκος της διαμέσου.

8. Εάν σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  τα **μη μηδενικά** διανύσματα  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ , είναι ανά δύο ορθογώνια, δηλαδή  $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$  για  $i \neq j$ , τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
9. Έστω ότι το  $\mathbf{a}$  είναι ένα τυχαίο αλλά σταθερό διάνυσμα στο  $\mathbb{R}^n$ .
- (α') Ναδειχθεί ότι  $\| \mathbf{a} \|_2 \leq \| \mathbf{a} \|_1$ .
- (β') Ναδειχθεί ότι  $\| \mathbf{a} \|_\infty \leq \| \mathbf{a} \|_p \leq n^{1/p} \| \mathbf{a} \|_\infty$  για  $p = 1, 2$ .
10. Σε χώρο  $X$  με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και επαγόμενη νόρμα  $\| \cdot \|$  δείξτε ότι για  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$  ισχύει  $\| a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \| = \| b\mathbf{u} + a\mathbf{v} \|$  για όλα τα  $a, b \in \mathbb{R}$  αν και μόνο αν  $\| \mathbf{u} \| = \| \mathbf{v} \|$ .
11. **Η νόρμα Frobenius.** Εάν  $A$  είναι ένα  $n \times n$  μητρώο, ορίζουμε το **ίχνος** (trace) του  $A$  να είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του  $A$ . Το συμβολίζουμε με  $\text{trace } A$  έτσι

$$\text{trace } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

- (α') Δείξτε ότι στον χώρο  $\mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{R})$  η σχέση

$$\langle A, B \rangle := \text{trace}(A^T B)$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο. Την επαγόμενη νόρμα ονομάζουμε **νόρμα Frobenius**.

- (β') Βρείτε μια αναλυτική έκφραση για την νόρμα Frobenius  $\| \cdot \|_F$  του μητρώου  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}^{2,3}$ .

12. Αν

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορίζουμε το μητρώο  $Q = 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - I$ .

- (α') Δείξτε ότι  $Q = Q^T$  και  $Q^2 = I$  επομένως  $Q^{-1} = Q^T = Q$ .

- (β') Οι στήλες του είναι μοναδιαία διανύσματα, κάθετα μεταξύ τους και αποτελούν μια βάση για το  $\mathbb{R}^2$ .

## ΛΥΣΕΙΣ

1. (α) Πράγματι για  $\mathbf{x} = \mathbf{u}$  έχουμε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου.

- (β) Αν  $\mathbf{u} \in X$ , τότε για  $\mathbf{v} \in X$ , έχουμε

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{v} - \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad (\text{από γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Δείχνουμε ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες που ορίζουν ένα εσωτερικό γινόμενο.

Σημειώνουμε ότι αν  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , τότε

$$A\mathbf{u} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}.$$

Έτσι αν  $A\mathbf{u} = \mathbf{x}$  και  $A\mathbf{v} = \mathbf{y}$ , τότε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

και

$$\|A\mathbf{u}\| = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

- (i) Για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{u}$  έχουμε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{u} = \|A\mathbf{u}\|^2 \geq 0$$

όπου  $\|\cdot\|$  είναι το μέτρο διανύσματος του  $\mathbb{R}^3$ .

- (ii) Αν  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ , τότε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{u} = \|A\mathbf{u}\|^2 = 0 \Leftrightarrow A\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

και επειδή το μητρώο  $A$  είναι αντιστρέψιμο η μοναδική λύση του συστήματος  $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$  είναι η μηδενική, κατά συνέπεια  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

- (iii)

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= (A(\mathbf{u} + \mathbf{v})) \cdot A\mathbf{w} \\ &= (A\mathbf{u} + A\mathbf{v}) \cdot A\mathbf{w} \quad (\text{ιδιότητα γινομένου μητρώων}) \\ &= A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{w} + A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{w} \quad (\text{ιδιότητα του συνήθους εσωτερικού γινομένου}) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad (\text{ορισμός του } \langle \cdot, \cdot \rangle)\end{aligned}$$

- (iv)

$$\begin{aligned}\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= A(\lambda \mathbf{u}) \cdot A\mathbf{v} \\ &= (\lambda A\mathbf{u}) \cdot A\mathbf{v} \\ &= \lambda A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} \quad (\lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})) \\ &= \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} \\ &= A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{u} & (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle\end{aligned}$$

3. Από την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$  και για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle\end{aligned}$$

ισοδύναμα

$$\|\mathbf{v}\|^2 t^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$$

για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , κατά συνέπεια το τριώνυμο ή δεν έχει ρίζες, ή έχει διπλή ρίζα, ισοδύναμα η διακρίνουσά του είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός, ισοδύναμα

$$4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{u}\|^2 \Leftrightarrow |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \quad (1)$$

που είναι το ζητούμενο. Ισότητα στην (1) συμβαίνει αν και μόνο εάν το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα, ισοδύναμα υπάρχει  $t_0 \in \mathbb{R}$  ώστε

$$\langle \mathbf{u} - t_0\mathbf{v}, \mathbf{u} - t_0\mathbf{v} \rangle = 0,$$

τότε όμως από ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου ( $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ), έπεται ότι  $\mathbf{u} - t_0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , ισοδύναμα  $\mathbf{u} = t_0\mathbf{v}$ , ισοδύναμα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

4.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} \pm \mathbf{v}, \mathbf{u} \pm \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \pm \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \pm \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \pm 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 & (\text{αφού } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0)\end{aligned}$$

Ο όρος που καθορίζεται από το πρόσθετο είναι το μικτό εσωτερικό γινόμενο το οποίο είναι ίσο με μηδέν από ορθογωνιότητα. Έτσι

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2}.$$

Η τελευταία σχέση είναι το πυθαγόρειο θεώρημα.

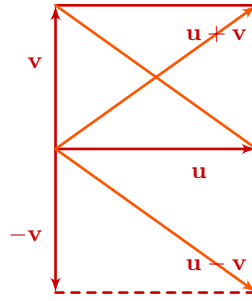
Γεωμετρικά στον  $\mathbb{R}^n$ : Τα δύο κάθετα διανύσματα παράγουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, του οποίου οι δύο διαγώνιοι είναι ίσες, βλέπε Σχήμα 1. Η μία, από το  $\mathbf{0}$ , είναι το άθροισμα  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  και η άλλη έχει μήκος  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ , επομένως

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Τόσο απλά.

5. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3\|^2 &= \langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle + \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 \rangle & (\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0 \text{ αν } i \neq j) \\ &= \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{u}_3\|^2.\end{aligned}$$



Σχήμα 1: Άσκηση 4.

6. Στην λύση της Άσκησης 4 δείξαμε ότι

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

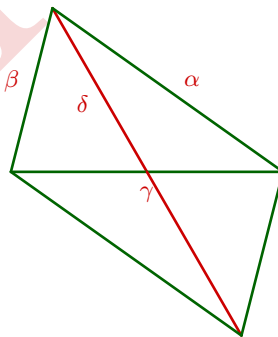
Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2).$$

Σημειώνουμε ότι οι ποσότητες  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$  και  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  είναι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$ . Ο νόμος του παραλληλογράμμου λέει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών.

7. Προεκτείνοντας τη διάμεσο κατά  $\delta$  και στη συνέχεια κατασκευάζοντας το σχετικό τετράπλευρο, βλέπε Σχήμα 2, παρατηρούμε ότι οι διαγώνιοί του διχοτομούνται άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο με πλευρές  $\alpha, \beta$  και διαγώνιους  $\gamma, \delta$ . Έτσι από το νόμο του παραλληλογράμμου (Άσκηση 6) έχουμε

$$(2\delta)^2 + \gamma^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2} + 2\delta^2.$$



Σχήμα 2: Άσκηση 7.

8. Έστω ότι  $c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ , δείχνουμε ότι  $c_1 = c_2 = \dots = 0$ . Για  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  από την υπόθεση έχουμε

$$\langle c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{u}_k \rangle = 0,$$

από την Άσκηση 1 (β'), οπότε από την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου βρίσκουμε

$$c_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle + c_2 \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_k \rangle + \dots + c_n \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_k \rangle = 0$$

$$c_k \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle = 0 \quad (\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k \rangle = 0 \quad j \neq k)$$

$$c_k \|\mathbf{u}_k\|^2 = 0$$

οπότε  $c_k = 0$  αφού  $\mathbf{u}_k \neq 0$ . Το  $k$  είναι τυχαίο, επομένως το αποτέλεσμα ισχύει για όλα τα  $k = 1, 2, \dots, n$ .

9. Έστω  $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Θυμίζουμε ότι για μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς  $r, s$  έχουμε  $\sqrt{r+s} \leq \sqrt{r} + \sqrt{s}$ , έτσι

(α)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\|_2 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \leq \sqrt{a_1^2} + \sqrt{a_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2} \\ &= |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \\ &= \|\mathbf{a}\|_1\end{aligned}$$

(β) Έστω  $\max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\} = |a_k|$ , για κάποιο  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , τότε

i. ( $p = 1$ ) Αφενός

$$\|\mathbf{a}\|_\infty = |a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = \|\mathbf{a}\|_1$$

και αφετέρου

$$\|\mathbf{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leq |a_k| + |a_k| + \dots + |a_k| = n\|\mathbf{a}\|_\infty$$

έτσι συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες βρίσκουμε

$$\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_1 \leq n\|\mathbf{a}\|_\infty.$$

ii. ( $p = 2$ ) Αφενός

$$\|\mathbf{a}\|_\infty = |a_k| = \sqrt{|a_k|^2} \leq \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2} = \|\mathbf{a}\|_2$$

και αφετέρου

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\|_2 &= \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2} \leq \sqrt{|a_k|^2 + |a_k|^2 + \dots + |a_k|^2} \\ &= \sqrt{n|a_k|^2} \\ &= \sqrt{n}\|\mathbf{a}\|_\infty\end{aligned}$$

οπότε από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι

$$\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{a}\|_\infty$$

που είναι το ζητούμενο.

10. Από την υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\mathbf{u} + \mathbf{b}\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{b}\mathbf{u} + \mathbf{a}\mathbf{v}\|^2 \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}\mathbf{u} + \mathbf{b}\mathbf{v}, \mathbf{a}\mathbf{u} + \mathbf{b}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{b}\mathbf{u} + \mathbf{a}\mathbf{v}, \mathbf{b}\mathbf{u} + \mathbf{a}\mathbf{v} \rangle \\ &\Leftrightarrow a^2\|\mathbf{u}\|^2 + 2ab\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + b^2\|\mathbf{v}\|^2 = b^2\|\mathbf{u}\|^2 + 2ab\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + a^2\|\mathbf{v}\|^2 \\ &\Leftrightarrow (a^2 - b^2)\|\mathbf{u}\|^2 = (a^2 - b^2)\|\mathbf{v}\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

παίρνοντας  $a^2 \neq b^2$ .

11. Αν  $A, B \in \mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{R})$ , τότε το μητρώο  $A^T B$  είναι  $m \times m$ . Αν  $\mathbf{a}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  είναι οι στήλες του μητρώου  $A$ , τότε

$$A^T A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m) = (\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j) = (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)$$

με  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , όπου “ $\cdot$ ” είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathbb{R}^n$ . Έτσι

(i)

$$\langle A, A \rangle = \text{trace}(A^T A) = \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_m^T \mathbf{a}_m = \|\mathbf{a}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{a}_m\|^2 \geq 0$$

όπου  $\|\mathbf{a}_j\|$  είναι το μέτρο του διανύσματος  $\mathbf{a}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  και

$$\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{a}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{a}_m\|^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{a}_m = \mathbf{0} \Leftrightarrow A = O,$$

όπου  $O$  είναι το μηδενικό  $m \times m$  μητρώο.

(ii)

$$\begin{aligned} \langle A + B, C \rangle &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1)^T \mathbf{c}_1 + \cdots + (\mathbf{a}_m + \mathbf{b}_m)^T \mathbf{c}_m \\ &= (\mathbf{a}_1^T + \mathbf{b}_1^T) \mathbf{c}_1 + \cdots + (\mathbf{a}_m^T + \mathbf{b}_m^T) \mathbf{c}_m \\ &= \mathbf{a}_1^T \mathbf{c}_1 + \mathbf{b}_1^T \mathbf{c}_1 + \cdots + \mathbf{a}_m^T \mathbf{c}_m + \mathbf{b}_m^T \mathbf{c}_m \\ &= \text{trace}(A^T B) + \text{trace}(A^T C) \\ &= \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \langle \lambda A, B \rangle &= (\lambda \mathbf{a}_1)^T \mathbf{b}_1 + \cdots + (\lambda \mathbf{a}_m)^T \mathbf{b}_m \\ &= (\lambda \mathbf{a}_1^T) \mathbf{b}_1 + \cdots + (\lambda \mathbf{a}_m^T) \mathbf{b}_m \\ &= \lambda \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_1 + \cdots + \lambda \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_m \\ &= \lambda \text{trace}(A^T B) \\ &= \lambda \langle A, B \rangle. \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m \rangle \\ &= \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{b}_m, \mathbf{a}_m \rangle \\ &= \langle B, A \rangle \end{aligned}$$

αφού το “ $\cdot$ ” είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Επομένως η σχέση  $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B)$  είναι εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των πραγματικών  $n \times m$  μητρώων.

Αν

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

τότε από το (i) έχουμε

$$\begin{aligned} \|A\|_F &= \sqrt{\text{trace}(A^T A)} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2} \\ &= \left( \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

12. Σημειώνουμε ότι  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1$  αφού το  $\mathbf{q}$  είναι μοναδιαίο.

(α) Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} Q^T &= (2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - I)^T = (2\mathbf{q}\mathbf{q}^T)^T - I^T = 2(\mathbf{q}^T)^T \mathbf{q}^T - I = 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - I = Q \\ Q^2 &= (2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - I)(2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - I) = 4\mathbf{q}\mathbf{q}^T \mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + I^2 = 4\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 4\mathbf{q}\mathbf{q}^T + I = I \end{aligned}$$

Από τις δύο σχέσεις έπεται ότι

$$Q^2 = QQ^T = I \Rightarrow Q = Q^T = Q^{-1}$$

από μοναδικότητα του αντίστροφου μητρώου.

(β) Αν  $Q = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)$ , τότε, βλέπε Άσκηση 11, έχουμε

$$Q^T Q = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\|\mathbf{a}_1\| = \|\mathbf{a}_2\| = 1, \quad \text{και} \quad \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = 0.$$

Επομένως τα διανύσματα  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, βλέπε Άσκηση 8, κατά συνέπεια αποτελούν μια βάση στον  $\mathbb{R}^2$ , είναι μοναδιαία και ορθογώνια μεταξύ τους. Μια τέτοια βάση λέγεται **ορθοκανονική** βάση. Ένα μητρώο του οποίου οι στήλες είναι μοναδιαία διανύσματα ανά δύο ορθογώνια λέγεται **ορθογώνιο** μητρώο. Θα συζητούσαμε αναλυτικά τις έννοιες αυτές σε επόμενο κεφάλαιο.