

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 07. Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ανασκόπηση

- ♦ **Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν X είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και νόρμα που ορίζεται με τη σχέση $\| \cdot \| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ (**επαγόμενη νόρμα**), τότε

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|$$

για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του X . Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

- ♦ **Το Πυθαγόρειο Θεώρημα.** Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$. Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του X ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, δηλαδή $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$, αν $i \neq j$, τότε

$$\| \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_n \|^2 = \| \mathbf{u}_1 \|^2 + \| \mathbf{u}_2 \|^2 + \dots + \| \mathbf{u}_n \|^2.$$

- ♦ **Ο νόμος του παραλληλογράμμου.** Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$. Δείξτε ότι

$$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 + \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 = 2(\| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2)$$

για όλα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ στο X .

Ασκήσεις

- Σε κάθε διανυσματικό χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ισχύουν
(α) Εάν για κάποιο $\mathbf{u} \in X$ είναι $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$, τότε $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
(β) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{u} \in X$.
- Εάν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$, και A είναι ένα αντιστρέψιμο 3×3 μητρώο δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$. Σημειώνουμε ότι

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^T A\mathbf{v} = \mathbf{u}^T A^T A\mathbf{v}.$$

- Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz. **Υπόδειξη:** Από την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

ισοδύναμα

$$\| \mathbf{v} \|^2 t^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \| \mathbf{u} \|^2 \geq 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τι μπορεί να ειπωθεί για την διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου;

4. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$. Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι ορθογώνια διανύσματα του X δείξτε ότι

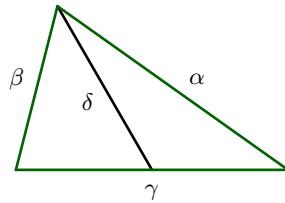
$$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|.$$

5. Αποδείξτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τρία διανύσματα. **Υπόδειξη:**

$$\| \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \|^2 = \langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \rangle.$$

6. Αποδείξτε το νόμο του παραλληλογράμμου.

7. Για το τρίγωνο του σχήματος χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο αποδείξτε το Θεώρημα του



Απολλωνίου:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2} + 2\delta^2,$$

όπου δ είναι το μήκος της διαμέσου.

8. Εάν σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ τα **μη μηδενικά** διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, είναι ανά δύο ορθογώνια, δηλαδή $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ για $i \neq j$, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
9. Έστω ότι το $\mathbf{a}$ είναι ένα τυχαίο αλλά σταθερό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$.
- (α') Ναδειχθεί ότι $\| \mathbf{a} \|_2 \leq \| \mathbf{a} \|_1$.
- (β') Ναδειχθεί ότι $\| \mathbf{a} \|_\infty \leq \| \mathbf{a} \|_p \leq n^{1/p} \| \mathbf{a} \|_\infty$ για $p = 1, 2$.
10. Σε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$ δείξτε ότι για $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ ισχύει $\| a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \| = \| b\mathbf{u} + a\mathbf{v} \|$ για όλα τα $a, b \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\| \mathbf{u} \| = \| \mathbf{v} \|$.
11. **Η νόρμα Frobenius.** Εάν A είναι ένα $n \times n$ μητρώο, ορίζουμε το **ίχνος** (trace) του A να είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του A . Το συμβολίζουμε με $\text{trace } A$ έτσι

$$\text{trace } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

- (α') Δείξτε ότι στον χώρο $\mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{R})$ η σχέση

$$\langle A, B \rangle := \text{trace}(A^T B)$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο. Την επαγόμενη νόρμα ονομάζουμε **νόρμα Frobenius**.

- (β') Βρείτε μια αναλυτική έκφραση για την νόρμα Frobenius $\| \cdot \|_F$ του μητρώου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}^{2,3}$.

12. Αν

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορίζουμε το μητρώο $Q = 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - I$. Για το Q δείξτε ότι

- (α) Δείξτε ότι $Q = Q^T$ και $Q^2 = I$ επομένως $Q^{-1} = Q^T = Q$.

- (β) Οι στήλες του είναι μοναδιαία διανύσματα, κάθετα μεταξύ τους και αποτελούν μια βάση για το $\mathbb{R}^2$.