

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6. Υπόχωροι, βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Επισκόπηση

Έχοντας μελετήσει τη σχετική θεωρία θα πρέπει να έχουμε κατανοήσει τις παρακάτω βασικές έννοιες:

1. Διανυσματικός χώρος, διανυσματικός υπόχωρος
2. Γραμμική εξάρτηση/ανεξαρτησία διανυσμάτων
3. Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Συνοψίζοντας: Αν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του διανυσματικού χώρου X ,

- ◆ Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{u}_k$ δηλαδή το

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$$

είναι υπόχωρος του X .

- ◆ Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

(α') Τα διανύσματα είναι **γραμμικά εξαρτημένα**.

(β') Κάποιο από τα διανύσματα αυτά εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

(γ') Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$ με μία τουλάχιστον από αυτές διάφορη του μηδενός, ώστε

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

- ◆ Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

(α') Τα διανύσματα είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.

(β') Δεν υπάρχει $\mathbf{u}_k$ που να εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

(γ') Αν για τις σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$ ισχύει

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

τότε $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

- ◆ Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ αποτελούν μια βάση του X **αν και μόνο αν**

(α') Τα διανύσματα είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** και

(β') $X = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

- ◆ Αν $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ είναι μια βάση του X , τότε $\dim X = n$. Κάθε βάση του X περιέχει **ακριβώς** n διανύσματα.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κάθε ένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικός υπόχωρος

$$(\alpha) \ U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \text{ με } x + 2y + z = 0 \right\}.$$

$$(\beta) \ V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \text{ με } x = y \text{ και } 2y = z \right\}.$$

$$(\gamma) \ W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \text{ με } x + y = z \right\}.$$

2. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος και V και W υπόχωροι του X .

(α) Δείξτε ότι το $V \cap W$ είναι υπόχωρος του X .

(β) Ορίζουμε το **άθροισμα**

$$V + W = \{v + w : v \in V \text{ και } w \in W\}.$$

Δείξτε ότι το $V + W$ είναι υπόχωρος του X .

3. Εξηγήστε γιατί τα διανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

δεν αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^3$. Στη συνέχεια βρείτε το $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

4. Δείξτε ότι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ είναι μια βάση για τον $\mathbb{P}_n$. Συμπεράνατε ότι $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.

5. Έστω $\mathbb{P}_3^*$ το σύνολο των πολυωνύμων του $\mathbb{P}_3$ με μηδενικό σταθερό όρο, $\mathbb{P}_3^* = \{p \in \mathbb{P}_3 : p(0) = 0\}$.

(α) Δείξτε ότι το $\mathbb{P}_3^*$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{P}_3$.

(β) Να βρεθεί μια βάση για τον $\mathbb{P}_3^*$.

6. Εάν τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ κάποιου διανυσματικού χώρου X είναι γραμμικά ανεξάρτητα, εξετάστε ως προς την ανεξαρτησία τα διανύσματα

$$(\alpha) \ \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2.$$

$$(\beta) \ \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2.$$

7. Έστω V ο υπόχωρος του $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = \cos^2 x$, $\mathbf{v}_2 = \sin^2 x$, και $\mathbf{v}_3 = \cos 2x$.

(α) Δείξτε ότι το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ δεν είναι βάση για τον V .

(β) Να βρεθεί μια βάση για τον V .

8. Να βρεθούν βάσεις για κάθε έναν υπόχωρο των διανυσμάτων $(x \ y \ z)^T$ του $\mathbb{R}^3$ για τον οποίο

$$(\alpha) \ x = y = z.$$

$$(\beta) \ ax + by + cz = 0, \text{ όπου } a, b, c \text{ είναι πραγματικές σταθερές με } a \neq 0.$$

9. Έστω ότι W είναι υπόχωρος του πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου X , και έστω $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ να είναι μια βάση για τον W . Αποδείξτε ότι η $\mathcal{B}_W$ μπορεί να εμπλουτισθεί με στοιχεία $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ του X ώστε το $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ να είναι μια βάση για τον X , βλέπε Παράδειγμα 7, Διάλεξη 6.

10. Έστω

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Δείξτε ότι

(α) Το V με τις πράξεις του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.

(β) $\dim V = 2$.

(γ) Να βρεθεί υπόχωρος W του $\mathbb{R}^3$, ώστε $\mathbb{R}^3 = V + W$.

(δ) Ποια είναι η διάσταση του W , ($\dim W = ;$).

(ε) Είναι ο W ο μοναδικός υπόχωρος για τον οποίο $\mathbb{R}^3 = V + W$.