

ΑΣΚΗΣΕΙΣ με ΛΥΣΕΙΣ 01.

1. Εάν

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ με $a_1 > b_1 > 0$, και $b_2 > a_2 > 0$, εξηγήστε τι περιγράφει καθένα από τα σύνολα

(α) $S_1 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \leq 0 \text{ και } \mu \leq 0\}.$

(β) $S_2 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \geq 0\}.$

(γ) $S_3 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \in \mathbb{R}\}.$

(δ) $S_4 = \{\mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \mu \in \mathbb{R}\}.$

(ε) $S_5 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in [0, 1], \mu \in \mathbb{R}\}.$

2. Να βρεθούν σταθερές c_1, c_2, c_3 ώστε

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, c_3 ώστε

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. **Ορισμός.** Εάν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ ο ιδιαίτερος γραμμικός συνδυασμός

$$(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

λέγεται **κυρτός συνδυασμός** των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

(α) Θεωρείστε τον κυρτό συνδυσμό

$$\mathbf{v}(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Δείξτε ότι καθώς το t διαγράφει το διάστημα $[0, 1]$ το διάνυσμα $\mathbf{v}(t)$ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(0, 2)$ και $(1, 1)$ ¹.

¹Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε διάστημα $[a, b]$ της ευθείας ισχύει

$$[a, b] = \{x : x = (1-t)a + tb \text{ για κάποιο } t \in [0, 1]\}.$$

Τι θα λέγατε να το αποδεικνύατε. Το ανάλογο ισχύει και για τα διαστήματα $[a, b)$, ή $(a, b]$, ή (a, b) .

(β) Ελευθερώνοντας το t ώστε να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή δικαιολογήστε γιατί το $\mathbf{v}(t)$ παριστάνει την εξίσωση της ευθείας του επιπέδου η οποία περιέχει τα σημεία $(0, 2)$ και $(1, 1)$.

(γ) Γράφοντας

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

και διαπιστώνοντας ότι η εν λόγω ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$, γενικεύστε και δείξτε ότι η ευθεία του επιπέδου η οποία περιέχει το σημείο (a, b) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}^T$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Βλέπε Άσκηση 1 (δ).

5. ♦ **Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ για κάποια σταθερά λ .

6. Αν $a, b, \theta \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι

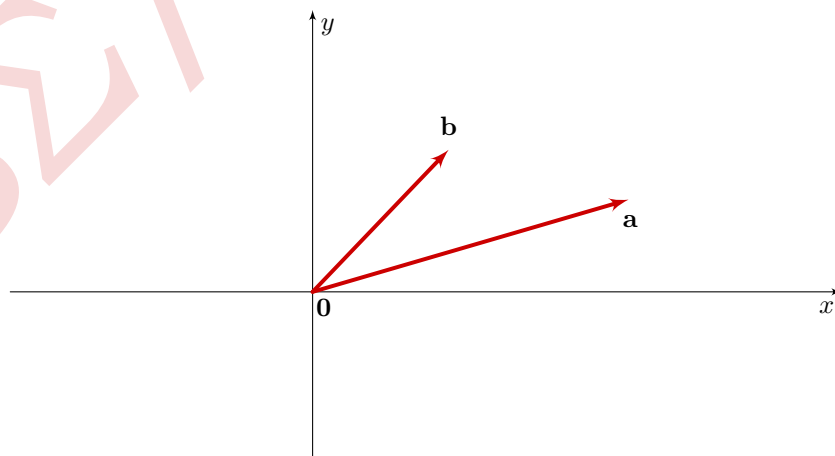
$$(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 \leq a^2 + b^2.$$

7. Εάν $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

ΛΥΣΕΙΣ

1. Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα είναι όπως στο Σχήμα 1.



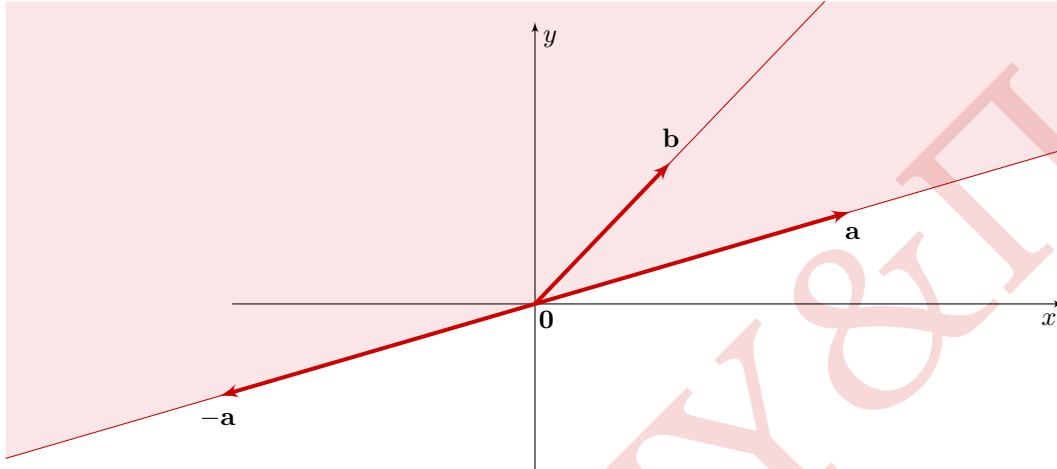
Σχήμα 1: Τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

Έστω $S_0 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \geq 0 \text{ και } \mu \geq 0\}$, Διάλεξη 1, σελ. 14-15.

(α) $S_1 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \leq 0 \text{ και } \mu \leq 0\} = -S_0$.

(β) $S_2 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \geq 0\}$.

Το τυπικό διάνυσμα του S_2 είναι διαγώνιος παραλληλογράμμου με πλευρές κατά μήκος του διανύσματος $\mathbf{a}$, ή του $-\mathbf{a}$, δηλαδή της ευθείας $\lambda \mathbf{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, και του διανύσματος $\mathbf{b}$, δηλαδή της ημιευθείας $\mu \mathbf{b}$, $\mu \geq 0$. Κατά συνέπεια το S_2 είναι το ημιεπίπεδο που καθορίζει η ευθεία δια του $\mathbf{a}$ το οποίο περιέχει το διάνυσμα $\mathbf{b}$. Είναι το σκιασμένο στο Σχήμα 2.

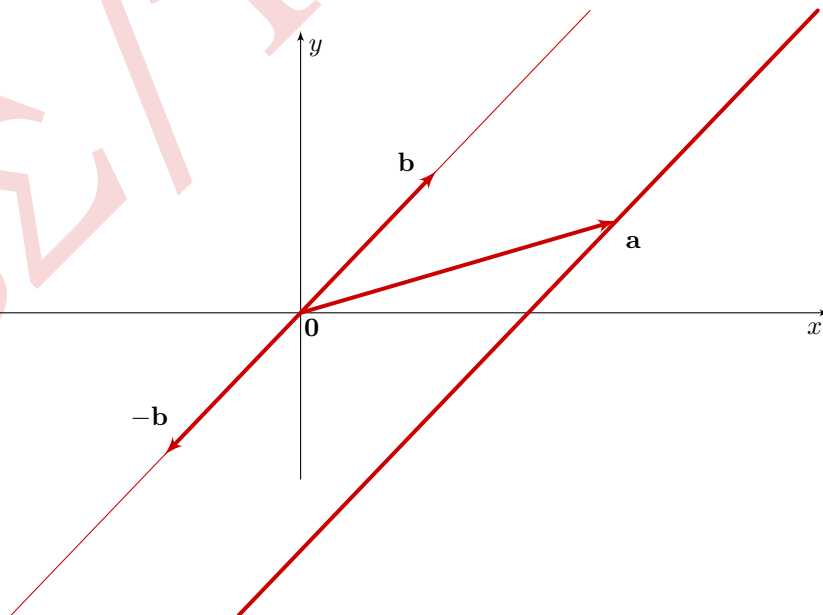


Σχήμα 2: Το σύνολο S_2 .

(γ) $S_3 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \in \mathbb{R}\}$.

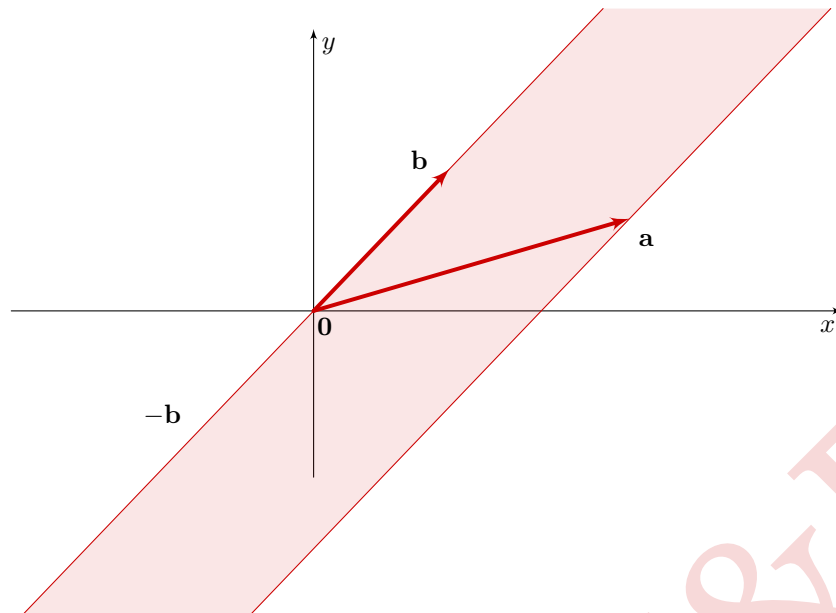
(δ) $S_4 = \{\mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \mu \in \mathbb{R}\}$.

Το τυπικό διάνυσμα του S_4 είναι διαγώνιος παραλληλογράμμου με μία πλευρά το διάνυσμα $\mathbf{a}$, και την άλλη κατά μήκος της ευθείας $\mu \mathbf{b}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια το S_4 είναι η ευθεία δια του $\mathbf{a}$ παράλληλη στην $\mu \mathbf{b}$.



Σχήμα 3: Το S_4 .

(ε) $S_5 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in [0, 1], \mu \in \mathbb{R}\}$.



Σχήμα 4: Το S_5 .

2. Η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 6 \\ 2c_1 - 3c_2 + 2c_3 = 14 \\ 3c_1 + c_2 - c_3 = -2 \end{cases}$$

Περιγράφουμε τη διαδικασία της επίλυσης με συστηματικό τρόπο που θα χρησιμοποιήσουμε και αργότερα. Επιλύουμε το σύστημα με τη μέθοδο της απαλοιφής, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε δύο από τις εξισώσεις με κατάλληλη σταθερά την κάθε μια ώστε αν τις προσθέσουμε απαλείφεται κάποιος από τους αγνώστους. Για παράδειγμα αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με -2 και προσθέσουμε το αποτέλεσμα στη δεύτερη εξίσωση απαλείφεται ο c_1 . Αν με E_j συμβολίσουμε την j -εξίσωση τη συγκεκριμένη πράξη συμβολίζουμε με $-2E_1 + E_2$, έτσι στο ισοδύναμο σύστημα η δεύτερη εξίσωση είναι η $-2E_1 + E_2$ και τη πράξη αυτή δηλώνουμε ως $E_2 \rightarrow -2E_1 + E_2$. Γενικά σε κάποιο βήμα η σχέση $E_j \rightarrow aE_i + bE_j$ δηλώνει ότι η j -εξίσωση του συστήματος προκύπτει ως ο συνδυασμός a επί την i -εξίσωση του προηγούμενου συστήματος συν b επί την j -εξίσωση του προηγούμενου συστήματος. Έτσι από το αρχικό σύστημα προκύπτει με τις κατάλληλες πράξεις, που δηλώνουμε, το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{array}{l} E_2 \rightarrow -2E_1 + E_2 \\ E_3 \rightarrow -3E_1 + E_3 \end{array} \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 6 \\ -7c_2 - 4c_3 = 2 \\ -5c_2 - 10c_3 = -20 \end{cases}$$

και συνεχίζοντας με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε διαδοχικά

$$\begin{array}{l} E_2 \rightarrow -2E_1 + E_2 \\ E_3 \rightarrow -\frac{1}{5}E_3 \end{array} \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 6 \\ -7c_2 - 4c_3 = 2 \\ c_2 + 2c_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} E_2 \rightarrow E_3 \\ E_3 \rightarrow E_2 \end{array} \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 6 \\ c_2 + 2c_3 = 4 \\ -7c_2 - 4c_3 = 2 \end{cases}$$

εδώ έγινε μετάθεση της εξίσωσης 2 με την εξίσωση 3

$$E_3 \rightarrow 7E_2 + E_3 \quad \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 6 \\ c_2 + 2c_3 = 4 \\ 10c_3 = 30 \end{cases}$$
$$E_3 \rightarrow \frac{1}{10}E_3 \quad \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 6 \\ c_2 + 2c_3 = 4 \\ c_3 = 3 \end{cases}$$

Έτσι από την τρίτη εξίσωση έχουμε $c_3 = 3$ και αντικαθιστώντας αυτή τη τιμή στη δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε $c_2 = -2$, και στη συνέχεια από την πρώτη εξίσωση υπολογίζουμε $c_1 = 1$.

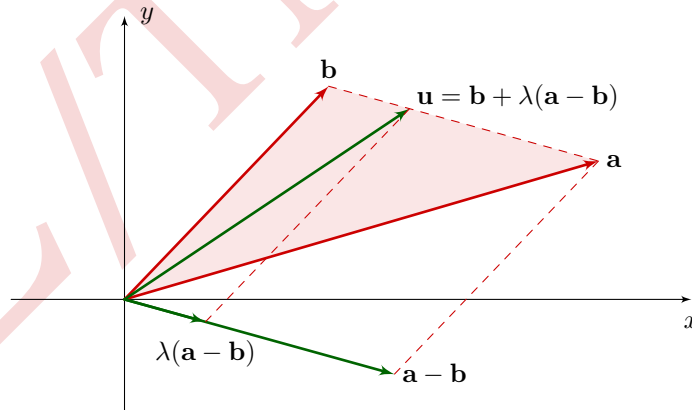
4. Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι δύο διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ τα οποία δεν περιέχονται στην ίδια ευθεία ο **κυρτός συνδυασμός** τους είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{u} = (1 - \lambda)\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Παρατηρώντας ότι το $\mathbf{u}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}),$$

βλέπουμε ότι το $\mathbf{u}$ είναι η διαγώνιος παραλληλογράμμου με πλευρές κατά μήκος των $\mathbf{b}$ και $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, βλέπε Σχήμα. Κατά συνέπεια το $\mathbf{u}$ διαγράφει τη βάση του τριγώνου με “πλευρές” τα $\mathbf{b}$ και $\mathbf{a}$, καθώς το λ διαγράφει το διάστημα $[0, 1]$. Για $\lambda = 0$ είναι $\mathbf{u} = \mathbf{b}$, ενώ για $\lambda = 1$ είναι $\mathbf{u} = \mathbf{a}$.



5. **Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta,$$

όπου $0 \leq \theta \leq \pi$ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Επομένως

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\cos \theta| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|, \quad (1)$$

αφού $-1 \leq \cos \theta \leq 1$. Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν $\cos \theta = \pm 1$, ισοδύναμα $\theta = 0$, ή $\theta = \pi$. Και στις δύο περιπτώσεις τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ περιέχονται στην ίδια ευθεία, ισοδύναμα αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ για κάποια σταθερά λ , είναι δηλαδή γραμμικά εξαρτημένα.

6. Αν $a, b, \theta \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned}(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 &= \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right]^2 \\ &\leq (a^2 + b^2)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) && \text{(από την 5)} \\ &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

7. Εάν $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &= \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(1 + 1 + \dots + 1) \\ &= n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).\end{aligned}$$