

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 01. Διανύσματα

1. Εάν

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ με $a_1 > b_1 > 0$, και $b_2 > a_2 > 0$, εξηγήστε τι περιγράφει καθένα από τα σύνολα

(α) $S_1 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \leq 0 \text{ και } \mu \leq 0\}.$

(β) $S_2 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \geq 0\}.$

(γ) $S_3 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \in \mathbb{R}\}.$

(δ) $S_4 = \{\mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \mu \in \mathbb{R}\}.$

(ε) $S_5 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in [0, 1], \mu \in \mathbb{R}\}.$

2. Να βρεθούν σταθερές c_1, c_2, c_3 ώστε

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, c_3 ώστε

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. **Ορισμός.** Εάν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ ο ιδιαίτερος γραμμικός συνδυασμός

$$(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

λέγεται **κυρτός συνδυασμός** των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

(α) Θεωρείστε τον κυρτό συνδυασμό

$$\mathbf{v}(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Δείξτε ότι καθώς το t διαγράφει το διάστημα $[0, 1]$ το διάνυσμα $\mathbf{v}(t)$ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(0, 2)$ και $(1, 1)$ ¹.

¹Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε διάστημα $[a, b]$ της ευθείας ισχύει

$$[a, b] = \{x : x = (1-t)a + tb \text{ για κάποιο } t \in [0, 1]\}.$$

Τι θα λέγατε να το αποδεικνύατε. Το ανάλογο ισχύει και για τα διαστήματα $[a, b)$, ή $(a, b]$, ή (a, b) .

(β) Ελευθερώνοντας το t ώστε να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή δικαιολογήστε γιατί το $\mathbf{v}(t)$ παριστάνει την εξίσωση της ευθείας του επιπέδου η οποία περιέχει τα σημεία $(0, 2)$ και $(1, 1)$.

(γ) Γράφοντας

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

και διαπιστώνοντας ότι η εν λόγω ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$, γενικεύστε και δείξτε ότι η ευθεία του επιπέδου η οποία περιέχει το σημείο (a, b) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}^T$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Βλέπε Άσκηση 1 (δ).

5. ♦ **Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ για κάποια σταθερά λ .

6. Αν $a, b, \theta \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι

$$(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 \leq a^2 + b^2.$$

7. Εάν $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$