

ΑΣΚΗΣΕΙΣ με ΛΥΣΕΙΣ 03. Μητρώα (συνέχεια)

Οι ασκήσεις (1.-6.) που ακολουθούν αποσκοπούν στον έλεγχο κατανόησης των βασικών εννοιών και στοιχειωδών πράξεων σχετικών με μητρώα. Είναι της μορφής Σωστό/Λάθος (Σ Λ). Απαντάτε κυκλώνοντας κατάλληλα. Μην απαντάτε στην τύχη, σκεφτείτε και επεξεργαστείτε τα δεδομένα πριν απαντήσετε.

1. (Σ Λ) Εάν A, B είναι μητρώα του ίδιου μεγέθους και r είναι μια σταθερά, τότε

$$(rA + B)^T = rA^T + B^T.$$

2. (Σ Λ) Εάν A, B είναι αντιστρέψιμα μητρώα του ίδιου μεγέθους, τότε και το $A + B$ είναι αντιστρέψιμο.

3. (Σ Λ) Εάν το A είναι ένα αντιστρέψιμο μητρώο, τότε και το A^T είναι αντιστρέψιμο.

4. (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B το $A + B^T$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ίδιου μεγέθους.

5. (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B το B είναι αντιστρέψιμο και το $A + B^{-1}$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ίδιου μεγέθους.

6. (Σ Λ) Εάν για τα τετραγωνικά μητρώα A και B ισχύει $AB = O$, τότε $A = O$ ή $B = O$.

7. Αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad ad - bc \neq 0,$$

τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

8. Έστω ότι το τετραγωνικό μητρώο A ικανοποιεί τη σχέση $A^2 - 4A + I = O$, όπου O είναι το μηδενικό μητρώο. Δείξτε το A αντιστρέφεται και ότι $A^{-1} = 4I - A$.

9. Εάν το A είναι τετραγωνικό μητρώο ώστε $A^{k+1} = O$, για κάποιο θετικό ακέραιο k , δείξτε ότι

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^k.$$

10. Εάν A και B είναι τετραγωνικά μητρώα ώστε $AB = O$ και το A είναι αντιστρέψιμο, δείξτε ότι $B = O$.

11. Έστω ότι το A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο. Αν $A^2 = O$, δείξτε ότι το A δεν αντιστρέφεται.

12. Θεωρούμε το διαγώνιο μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

με $a_i \neq 0$ για $i = 1, 2, \dots, n$. Δείξτε ότι το A είναι αντιστρέψιμο και βρείτε το A^{-1} .

13. Για τα 3×3 μητρώα μετάθεσης δείξτε ότι

(α) $M_k^{-1} = M_k^T$, για $k = 0, 1, \dots, 5$.

(β) Εφοδιασμένα με την πράξη του πολλαπλασιασμού αποτελούν ομάδα.

14. Εάν

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ορίζουμε $N = C - I$. Δείξτε ότι $N^3 = O$. Δείξτε επίσης ότι το C αντιστρέφεται και ότι

$$C^{-1} = I - N + N^2.$$

Υπόδειξη: $C = I + N$.

15. Έστω J_n το $n \times n$ μητρώο του οποίου όλα τα στοιχεία είναι 1. Δείξτε ότι

(α) $J_n^2 = nJ_n$

(β) $(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}J_n$.

ΛΥΣΕΙΣ

1. **(Σ) Λ** Εάν A, B είναι μητρώα του ίδιου μεγέθους και r είναι μια σταθερά, τότε

$$(rA + B)^T = rA^T + B^T.$$

Έπεται από τις ιδιότητες της αναστροφής $(A + B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

2. **Σ (Λ)** Εάν A, B είναι αντιστρέψιμα μητρώα του ίδιου μεγέθους, τότε και το $A + B$ είναι αντιστρέψιμο.

Αν το A είναι αντιστρέψιμο, τότε το $B = -A$ είναι αντιστρέψιμο και

$$B^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$$

από την ιδιότητα, αλλά $A + B = O$ δεν είναι αντιστρέψιμο.

3. **(Σ) Λ** Εάν το A είναι ένα αντιστρέψιμο μητρώο, τότε και το A^T είναι αντιστρέψιμο.

Το A^{-1} υπάρχει και από τις ιδιότητες της αναστροφής υπολογίζουμε

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$$

κατά συνέπεια το A^T αντιστρέφεται και $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

4. $\Sigma \quad \textcircled{\Lambda}$ Εάν για τα μητρώα A και B το $A + B^T$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ίδιου μεγέθους.

Αν το A είναι $n \times m$, με $n \neq m$, το B^T είναι $n \times m$, οπότε το B είναι $m \times n$ διαφορετικού μεγέθους από το A .

5. $\Sigma \quad \textcircled{\Lambda}$ Εάν για τα μητρώα A και B το B είναι αντιστρέψιμο και το $A + B^{-1}$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ίδιου μεγέθους.

Αφού το B αντιστρέφεται είναι $n \times n$, όπως και το B , άρα και το A αφού το $A + B^{-1}$ ορίζεται.

6. $\Sigma \quad \textcircled{\Lambda}$ Εάν για τα τετραγωνικά μητρώα A και B ισχύει $AB = O$, τότε $A = O$ ή $B = O$.

Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, τότε $A \neq O$, $B \neq O$, αλλά $AB = O$.

7. Αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad ad - bc \neq 0,$$

τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Θέτουμε $\lambda = ad - bc \neq 0$ και δείχνουμε ότι

$$A \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Πράγματι

$$A \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} \\ \frac{-c}{\lambda} & \frac{a}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{\lambda} & \frac{-ab+ab}{\lambda} \\ \frac{cd-cd}{\lambda} & \frac{ad-bc}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

από τον ορισμό του λ . Όμοια υπολογίζουμε και το άλλο γινόμενο.

8. Έστω ότι το τετραγωνικό μητρώο A ικανοποιεί τη σχέση $A^2 - 4A + I = O$, όπου O είναι το μηδενικό μητρώο. Δείξτε το A αντιστρέφεται και ότι $A^{-1} = 4I - A$.

$$A^2 - 4A + I = O \Rightarrow 4A - A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} A(4I - A) = I, \\ (4I - A)A = I. \end{cases}$$

Στη πρώτη περίπτωση βγάλαμε το A κοινό παράγοντα από τα αριστερά και στη δεύτερη από τα δεξιά. Το μητρώο λοιπόν $4I - A$ πολλαπλασιάζοντας το A είτε από τα δεξιά είτε από τα αριστερά δίνει ως γινόμενο το ταυτοτικό μητρώο I , επομένως το A αντιστρέφεται και από τη μοναδικότητα του αντίστροφου μητρώου έπεται ότι $A^{-1} = 4I - A$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Βγάζοντας κοινό παράγοντα στην παρένθεση έχουμε $4I - A$ και όχι $4 - A$ που δεν ορίζεται.

9. Εάν το A είναι τετραγωνικό μητρώο ώστε $A^{k+1} = O$, για κάποιο θετικό ακέραιο k , δείξτε ότι

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^k.$$

Αν $B = I + A + A^2 + \cdots + A^k$, αρκεί να δείξουμε ότι $(I - A)B = B(I - A) = I$. Πράγματι, από την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k) &= I + A + A^2 + \cdots + A^k - A - A^2 + \cdots - A^k - A^{k+1} \\ &= I - O \\ &= I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(I + A + A^2 + \cdots + A^k)(I - A) &= I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \cdots + A^k - A^{k+1} \\ &= I - O \\ &= I\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

10. Το A^{-1} υπάρχει, οπότε

$$AB = O \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}O \Rightarrow (A^{-1}A)B = O \Rightarrow IB = O \Rightarrow B = O.$$

11. Ας υποθέσουμε ότι A^{-1} υπάρχει, τότε (όπως στην προηγούμενη Άσκηση με A στη θέση του B)

$$A^2 = O \Rightarrow A^{-1}(AA) = A^{-1}O \Rightarrow (A^{-1}A)A = O \Rightarrow IA = O \Rightarrow A = O.$$

Με την υπόθεση ότι το A αντιστρέφεται καταλήξαμε στο ότι $A = O$, αυτό όμως είναι άτοπο (γιατί το O δεν έχει αντίστροφο), υπομένως η υπόθεση είναι ψευδής, άρα το A δεν έχει αντίστροφο.

12. **Λήμμα.** Το γινόμενο διαγωνίων μητρώων είναι διαγώνιο και τα στοιχεία της διαγωνίου του γινομένου είναι τα γινόμενα των αντίστοιχων στοιχείων των μητρώων.

Απόδειξη. Έστω ότι τα $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ είναι διαγώνια μητρώα (τετραγωνικά) του ίδιου μεγέθους, έστω $n \times n$. Αν $\mathbf{a}^i$ είναι οι γραμμές του A , $i = 1, 2, \dots, n$, το $\mathbf{a}^i$ έχει a_{ii} στην i -στήλη και μηδέν στις υπόλοιπες, και αν $\mathbf{b}^j$ είναι οι στήλες του B , $j = 1, 2, \dots, n$, το $\mathbf{b}^j$ έχει b_{jj} στην j -γραμμή και μηδέν στις υπόλοιπες. Αν $C = AB = (c_{ij})$ είναι το γινόμενο, τότε

$$c_{ij} = \mathbf{a}^i \mathbf{b}_j = (\mathbf{a}^i)^T \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

κατά συνέπεια το C είναι διαγώνιο και $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$. □

Αν για το διαγώνιο μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

με $a_i \neq 0$ για $i = 1, 2, \dots, n$ πάρουμε

$$A' = \begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_n \end{pmatrix}$$

τότε, σύμφωνα με το Λήμμα, έχουμε $AA' = A'A = I$, άρα $A^{-1} = A'$.

13. Αν

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και M είναι ένα 3×3 μητρώο μετάθεσης, τότε

$$M = (\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_j \ \mathbf{e}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\ell^T \\ \mathbf{e}_m^T \\ \mathbf{e}_n^T \end{pmatrix}$$

όπου $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $\ell, m, n \in \{1, 2, 3\}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους.

(α') Επομένως

$$\begin{aligned} M^T M &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i^T \\ \mathbf{e}_j^T \\ \mathbf{e}_k^T \end{pmatrix} (\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_j \ \mathbf{e}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

όμοια

$$\begin{aligned} M M^T &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\ell^T \\ \mathbf{e}_m^T \\ \mathbf{e}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{e}_\ell \ \mathbf{e}_m \ \mathbf{e}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

κατά συνέπεια $M^{-1} = M^T$.

(β') Έστω $\mathcal{M}_3$ το σύνολο των 3×3 μητρώων μετάθεσης. Ο πολλαπλασιασμός $M_k A$ ενός μητρώου A με μητρώο μετάθεσης M_k , μεταθέτει εκείνες τις γραμμές του A που μετατέθηκαν στο I για να προκύψει το M_k , έτσι αν το A είναι μητρώο μετάθεσης το $M_k A$ είναι μια μετάθεση γραμμών του I , άρα μητρώο μετάθεσης, ισοδύναμα το γινόμενο στοιχείων του $\mathcal{M}_3$ είναι στοιχείο του $\mathcal{M}_3$. Επιπλέον

- Ο πολλαπλασιασμός στο $\mathcal{M}_3$ είναι ο γνωστός πολλαπλασιασμός, άρα είναι προσεταιριστικός.
- Το ταυτοτικό μητρώο είναι μητρώο μετάθεσης, άρα υπάρχει στο $\mathcal{M}_3$ το ουδέτερο στοιχείο της πράξης.
- Κάθε στοιχείο M του $\mathcal{M}_3$ έχει αντίστροφο, το M^T , όπως δείξαμε στο (α').

Επομένως το $\mathcal{M}_3$ με την πράξη του πολλαπλασιασμού είναι ομάδα.

14. Είναι

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = C - I.$$

(α) $N^3 = O$. Βλέπε Ασκήσεις 2 #1.

(β) $C^{-1} = I - N + N^2$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$C(I - N + N^2) = (I - N + N^2)C = I$$

ισοδύναμα, από τον ορισμό του N ,

$$(N + I)(I - N + N^2) = (I - N + N^2)(N + I) = I.$$

Δείχνουμε τη μία από τις δύο ισότητες, η άλλη είναι παρόμοια. Πράγματι

$$\begin{aligned}(N + I)(I - N + N^2) &= N - N^2 + N^3 + I - N + N^2 \\ &= O + I && \text{(από το (α))} \\ &= I.\end{aligned}$$

15. (α) Έστω $J_n = (a_{ij})$ όπου $a_{ij} = 1$ για $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 1, 2, \dots, n$. Αν $\mathbf{a}^i$ είναι η i -γραμμή (ως μητρώο) του J_n και $\mathbf{a}_j$ είναι η j -στήλη του J_n , τότε

$$(\mathbf{a}^i)^T = \mathbf{a}_j, \quad \text{για όλα τα } i \text{ και όλα τα } j$$

έτσι το στοιχείο στην i -γραμμή και j -στήλη του J_n είναι το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = n$, οπότε βγάζοντας το n κοινό παράγοντα έχουμε ότι $J_n^2 = nJ_n$.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(I - J_n) \left(I - \frac{1}{n-1} J_n \right) = \left(I - \frac{1}{n-1} J_n \right) (I - J_n) = I.$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}(I - J_n) \left(I - \frac{1}{n-1} J_n \right) &= I - \frac{1}{n-1} J_n - J_n + \frac{1}{n-1} J_n^2 \\ &= I - \frac{n}{n-1} J_n + \frac{n}{n-1} J_n, && \text{(από το (α'))} \\ &= I.\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο δείχνεται και η άλλη ισότητα.