

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 3

Το αντίστροφο μητρώο και μητρώα ειδικής μορφής

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

14 Οκτωβρίου 2025

1. Το αντίστροφο μητρώο

Για τα μητρώα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

υπολογίζουμε

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

κατά συνέπεια το A και το B συμπεριφέρονται ως αντίστροφα στοιχεία αφού το γινόμενό τους είναι ίσο με το μοναδιαίο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

Ορισμός 1

Έστω ότι το A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο. Αν υπάρχει μητρώο B ώστε

$$AB = BA = I$$

λέμε ότι το A είναι **αντιστρέψιμο** και το B θα λέγεται (το) **αντίστροφο** του A .

Παράδειγμα 1

Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

παρατηρούμε ότι για κάθε 3×3 μητρώο

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

είναι

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(γιατί;). Άρα το γινόμενο AB δεν μπορεί να είναι ίσο με το ταυτοτικό μητρώο, κατά συνέπεια το A δεν είναι αντιστρέψιμο.

Θεώρημα 1

Το αντίστροφο μητρώο, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω A ένα αντιστρέψιμο μητρώο και έστω ότι B και C είναι τέτοια ώστε $AB = BA = I$ και $AC = CA = I$. Τα B, C έχουν την ίδια διάσταση, επιπλέον από τις ιδιότητες του γινομένου και του αντιστρόφου έχουμε

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Ορισμός 2

Το αντίστροφο μητρώο του τετραγωνικού μητρώου A , εφόσον αυτό υπάρχει, συμβολίζουμε με A^{-1} .

Έτσι αν το A είναι αντιστρέψιμο

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Άσκηση 1

Αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad ad - bc \neq 0,$$

τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα 2

Εάν A και B είναι αντιστρέψιμα μητρώα ίδιας διάστασης, τότε το μητρώο AB είναι αντιστρέψιμο και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,$$

κατά συνέπεια το μητρώο AB είναι αντιστρέψιμο και από τη μοναδικότητα του αντίστροφου έπεται ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Παρατήρηση 1

Εάν το τετραγωνικό μητρώο A είναι αντιστρέψιμο, το A^2 είναι αντιστρέψιμο

$$(A^2)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2$$

και επαγωγικά το A^n είναι αντιστρέψιμο, με $n = 1, 2, 3, \dots$, και $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
Ορίζουμε λοιπόν

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Έτσι έχουμε ορίσει τις ακέραιες δυνάμεις του A με τη σχέση

$$A^n = \begin{cases} \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ φορές}} & n = 1, 2, \dots \\ I & n = 0 \\ (A^{-1})^{-n} & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Επίσης από τη σχέση

Παρατήρηση 1 (συνέχεια)

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T$$

συμπεραίνουμε ότι αν το A είναι αντιστρέψιμο, τότε και το A^T αντιστρέφεται και $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, από την μοναδικότητα του αντίστροφου. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε

$$A^{-T} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Άσκηση 2

Εάν το A είναι ένα τετραγωνικό, αντιστρέψιμο μητρώο δείξτε ότι

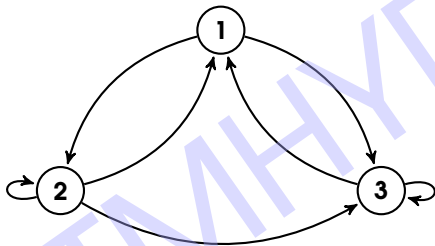
- α Το A^{-1} είναι αντιστρέψιμο και $(A^{-1})^{-1} = A$.
- β Εάν $\lambda \neq 0$, το λA είναι αντιστρέψιμο και

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

- γ Εάν k και l είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε

$$A^k A^l = A^{k+l}, \quad \text{και} \quad (A^k)^l = A^{kl}.$$

Εφαρμογή. Στη θεωρία γραφημάτων ένα κατευθυνόμενο γράφημα με n κόμβους μπορεί να παρασταθεί με ένα κατάλληλο $n \times n$ μητρώο $M = (m_{ij})$. Αν $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ είναι κόμβοι και υπάρχει ακμή από το i στο j γράφουμε $m_{ij} = 1$ διαφορετικά $m_{ij} = 0$. Για παράδειγμα το μητρώο που το περιγράφει το σχήμα



είναι το $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Το μητρώο $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

καταμετρά όλα τα μονοπάτια μήκους δύο μεταξύ των κόμβων, γενικώτερα το M^k τα μονοπάτια μήκους k , στο γράφημα. Πράγματι ο κόμβος 1 συνδέεται με τον εαυτό του με δύο μονοπάτια μήκους 2, τα 121 και 131. Όμοια ο κόμβος 2 συνδέεται με τον 3 με τρία μονοπάτια, τα 223, 233, και 213.

2. Μητρώα ειδικής μορφής

Ορισμός 3

Έστω $A = (a_{ij})$ ένα τετραγωνικό μητρώο.

- 1 Λέγοντας **κύρια διαγώνιο** του A εννοούμε τη “διαγώνιο” του A η οποία αποτελείται από τα στοιχεία a_{ii} .
- 2 Το A λέγεται **διαγώνιο** (diagonal) αν $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$.
- 3 Το A λέγεται **άνω τριγωνικό** (upper triangular) αν $a_{ij} = 0$ για $i > j$, δηλαδή τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.
- 4 Το A λέγεται **κάτω τριγωνικό** (lower triangular) αν $a_{ij} = 0$ για $i < j$, δηλαδή τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

Άσκηση 3

Δείξτε ότι το γινόμενο διαγωνίων μητρώων είναι επίσης διαγώνιο και στη συνέχεια διατυπώστε ένα κανόνα για τον πολλαπλασιασμό διαγωνίων μητρώων.

Παράδειγμα 2

Δείξτε ότι ο γραμμικός συνδυασμός 3×3 άνω τριγωνικών μητρώων είναι άνω τριγωνικό μητρώο

Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχαία 3×3 άνω τριγωνικά μητρώα A και B και πραγματικές ή μιγαδικές σταθερές r και s ο γραμμικός συνδυασμός $rA + sB$ είναι 3×3 μητρώο. Πράγματι

$$\begin{aligned} rA + sB &= r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & b_6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ 0 & ra_4 + sb_4 & ra_5 + sb_5 \\ 0 & 0 & ra_6 + sb_6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

είναι άνω τριγωνικό μητρώο.

Άσκηση 4

Δείξτε ότι αν

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και A είναι ένα 3×3 άνω τριγωνικό μητρώο, τότε υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_6$ ώστε

$$A = c_1 M_1 + c_2 M_2 + \dots + c_6 M_6.$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = aM_1 + bM_2 + cM_3 + pM_4 + qM_5 + tM_6.$$

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε τα άνω τριγωνικά μητρώα

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & b_6 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & b_6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 + a_2 b_4 & a_1 b_3 + a_2 b_5 + a_3 b_6 \\ 0 & a_4 b_4 & a_4 b_5 + a_5 b_6 \\ 0 & 0 & a_6 b_6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

δηλαδή το γινόμενο AB είναι επίσης άνω τριγωνικό.

4. Μητρώα μετάθεσης

Ας θεωρήσουμε ένα 3×3 μητρώο το οποίο προκύπτει μεταθέτοντας τις γραμμές του ταυτοτικού μητρώου I . Ένα τέτοιο μητρώο θα το λέμε **μητρώο μετάθεσης**. Στη συνέχεια ας δούμε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ενός τέτοιου μητρώου με ένα διάνυσμα, για παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Το γινόμενο λοιπόν είναι το διάνυσμα που προκύπτει από το αρχικό αν μεταθέσουμε τις ίδιες γραμμές που μετατέθηκαν στο I για να προκύψει το μητρώο μετάθεσης. Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μητρώων το ανάλογο αποτέλεσμα συμβαίνει σε κάθε στήλη ενός $3 \times m$ μητρώου αν πολλαπλασιαστεί από τα αριστερά με το μητρώο μετάθεσης (γιατί;). Ειδικότερα το γινόμενο δύο μητρώων μετάθεσης είναι μητρώο μετάθεσης. Τα 3×3 μητρώα μετάθεσης είναι $3! = 6$, τα

$$M_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ενδεικτικά υπολογίζουμε

$$M_3 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_4$$

$$M_1 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$M_4 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

και παρατηρούμε ότι $M_1^T = M_1$ και $M_4^T = M_3$.

Άσκηση 5

Για τα μητρώα μετάθεσης δείξτε ότι

- α) $M_k^{-1} = M_k^T$, για $k = 0, 1, \dots, 5$.
- β) Εφοδιασμένα με την πράξη του πολλαπλασιασμού αποτελούν ομάδα.

Ομάδες

Ορισμός 4

Έστω $\mathcal{G}$ ένα μη κενό σύνολο στο οποίο έχει ορισθεί μια πράξη $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \ni (x, y) \rightarrow x \cdot y \in \mathcal{G}$. Θα λέμε ότι η δομή $(\mathcal{G}, \cdot)$ είναι **ομάδα** (group) εάν ικανοποιούνται οι νόμοι:

- ε1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, για κάθε $x, y, z \in \mathcal{G}$. (Προσεταιριστικότητα της πράξης).
- ε2) Υπάρχει $e \in \mathcal{G}$, ώστε $e \cdot x = x \cdot e = x$ για κάθε $x \in \mathcal{G}$. (ουδέτερο στοιχείο).
- ε3) Για κάθε $x \in \mathcal{G}$, υπάρχει $x^{-1} \in \mathcal{G}$, ώστε $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = e$. (αντίστροφο στοιχείο).

Οι $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, όπου “+” και “·” είναι οι συνήθεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, αντίστοιχα, είναι ομάδες. Όμοια οι $(\mathbb{C}, +)$ και $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ είναι ομάδες. Επίσης η δομή $(\mathbb{R}^n, +)$ είναι ομάδα.

Παράδειγμα 4

Έστω A ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο. Κάθε ένα-προς-ένα απεικόνιση του A επί του A λέγεται **μετάθεση** (permutation) του A . Αν $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, ο τρόπος που συνήθως συμβολίζουμε μια μετάθεση, έστω s , του A είναι

$$s = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ s(a_1) & s(a_2) & \dots & s(a_n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Το σύνολο των μεταθέσεων του A συμβολίζουμε με S_A .

- Έστω $s_1, s_2 \in S_A$ και ας θεωρήσουμε τη σύνθεση $s_1 \circ s_2$, όπου $(s_1 \circ s_2)(a_i) = s_1(s_2(a_i))$. Επειδή οι s_1 και s_2 είναι ένα-προς-ένα έχουμε

$$s_1(s_2(a_i)) = s_1(s_2(a_j)) \Rightarrow s_2(a_i) = s_2(a_j) \Rightarrow a_i = a_j,$$

δηλαδή η $s_1 \circ s_2$ είναι ένα-προς-ένα. Επίσης $s_1(s_2(A)) = s_1(A) = A$, δηλαδή η $s_1 \circ s_2$ είναι επί του A κατά συνέπεια $s_1 \circ s_2 \in S_A$.

Αν $s_i, s_j \in S_A$ ορίζουμε το γινόμενο, γράφουμε απλά, $s_i s_j$ να είναι η σύνθεση $s_i \circ s_j$. Η $(S_A, \cdot)$ είναι ομάδα.

Παράδειγμα 5 (Ιστορικό)

Μια **γραμμική κίνηση** (linear motion) στο $\mathbb{R}^2$ είναι μια απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία “μετακινεί” ή μετασχηματίζει το σημείο (x, y) στο σημείο (x', y') ώστε

$$\begin{aligned}x' &= ax + by, \\y' &= cx + dy,\end{aligned}\quad \text{με} \quad ad - bc \neq 0. \quad (3)$$

Η ποσότητα $ad - bc$ λέγεται **ορίζουσα** (determinant) του μετασχηματισμού T και τη γράφουμε ως

$$J_T := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (4)$$

Η σχέση $J_T \neq 0$ εξασφαλίζει ότι η T είναι ένα-προς-ένα, κατά συνέπεια η αντίστροφη απεικόνιση T^{-1} υπάρχει. Πράγματι, λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$\begin{aligned}x &= \frac{d}{ad - bc}x' + \frac{-b}{ad - bc}y', \\y &= \frac{-c}{ad - bc}x' + \frac{a}{ad - bc}y' .\end{aligned} \quad (5)$$

Παράδειγμα 5 (συνέχεια)

Επιπλέον υπολογίζοντας την ορίζουσα του αντίστροφου μετασχηματισμού βρίσκουμε

$$J_{T^{-1}} = \frac{da - bc}{(ad - bc)^2} = \frac{1}{ad - bc} \neq 0,$$

κατά συνέπεια η αντίστροφη απεικόνιση T^{-1} είναι επίσης γραμμική κίνηση. Εάν $T(x, y) = (x', y')$ και $T'(x', y') = (x'', y'')$, όπου η T' δίνεται όπως στην (3) με a', b', c', d' στη θέση των a, b, c, d αντίστοιχα, και με $T'T$ συμβολίσουμε τη σύνθεση $T' \circ T$, τότε

$$\begin{aligned}x'' &= a'x' + b'y' = a'(ax + by) + b'(cx + dy) \\&= (a'a + b'c)x + (a'b + b'd)y \\y'' &= c'x' + d'y' = c'(ax + by) + d'(cx + dy) \\&= (c'a + d'c)x + (c'b + d'd)y\end{aligned}$$

και για την ορίζουσα της σύνθεσης υπολογίζουμε

$$(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) = (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0,$$

Παράδειγμα 5 (συνέχεια)

ισοδύναμα

$$J_{T \circ T'} = J_T J_{T'} \neq 0,$$

κατά συνέπεια η $T'T$ είναι και αυτή μια γραμμική κίνηση. Επιπλέον η ταυτοτική απεικόνιση $I(x, y) = (x, y)$ είναι επίσης γραμμική κίνηση αφού η (3) ικανοποιείται

$$\begin{aligned} x &= 1x + 0y, \\ y &= 0x + 1y, \end{aligned} \quad \text{με} \quad J_I = 1 - 0 \neq 0.$$

Δείχνεται εύκολα (και αφήνεται σαν άσκηση) ότι αν T, T', T'' είναι γραμμικές κινήσεις, τότε $(TT')T'' = T(T'T'')$. Επομένως οι κινήσεις αυτές με την πράξη του πολλαπλασιασμού-σύνθεσης αποτελούν ομάδα. Η ομάδα αυτή λέγεται διδιάστατη **γενική γραμμική ομάδα** (general linear group) και συμβολίζεται με $GL(2, \mathbb{R})$.

Είδαμε ότι ο μετασχηματισμός T είναι ένα-προς-ένα, ισοδύναμα αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $J_T \neq 0$, δηλαδή η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.

Παράδειγμα 5 (συνέχεια)

Κάθε τέτοια απεικόνιση μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο ενός 2×2 μητρώου με διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$, συγκεκριμένα

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Είδαμε ότι η σχέση $ad - bc \neq 0$ εξασφαλίζει ότι υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός και δίνεται από τη σχέση

$$T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7)$$

βλέπε (5), έτσι ώστε αν $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, τότε $\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}$ αφού

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(Άσκηση (3.1)). Την ποσότητα $ad - bc$ θα τη λέμε ορίζουσα του μητρώου στην (6).

Παράδειγμα 5 (συνέχεια)

Εάν

$$T(x, y) = (x', y') \quad \text{και} \quad T'(x', y') = (x'', y''),$$

όπου η T' δίνεται όπως στην (6) με a', b', c', d' στη θέση των a, b, c, d αντίστοιχα, και με $T'T$ συμβολίσουμε τη σύνθεση $T' \circ T$ δείξαμε ότι

$$T'T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

το οποίο όμως είναι

$$= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε, ισοδύναμα, τη διδιάστατη γενική γραμμική ομάδα $GL(2, \mathbb{R})$ ως το σύνολο των 2×2 μητρώων με μη μηδενική ορίζουσα (ισοδύναμα των αντιστρέψιμων μητρώων), με πράξη τον πολλαπλασιασμό.

Ορισμός 5

Έστω $\mathcal{F}$ ένα μη κενό σύνολο στο οποίο έχουν ορισθεί δύο πράξεις, πρόσθεση $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \ni (x, y) \rightarrow x + y \in \mathcal{F}$ και πολλαπλασιασμός, $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \ni (x, y) \rightarrow x \cdot y \in \mathcal{F}$. Η δομή $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ λέγεται **σώμα** (field) εάν ισχύουν οι νόμοι

- F1 $x + y = y + x$, για κάθε $x, y \in \mathcal{F}$.
- F2 $(x + y) + z = x + (y + z)$, για κάθε $x, y, z \in \mathcal{F}$.
- F3 Υπάρχει $0 \in \mathcal{F}$, ώστε $x + 0 = x$, για κάθε $x \in \mathcal{F}$.
- F4 Για κάθε $x \in \mathcal{F}$ υπάρχει $-x \in \mathcal{F}$, ώστε $x + (-x) = 0$.
- F5 $x \cdot y = y \cdot x$, για κάθε $x, y \in \mathcal{F}$.
- F6 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, για κάθε $x, y, z \in \mathcal{F}$.
- F7 Υπάρχει $1 \in \mathcal{F}$, $1 \neq 0$ ώστε $x \cdot 1 = x$, για κάθε $x \in \mathcal{F}$.
- F8 Για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει $x^{-1} \in \mathcal{F}$, ώστε $x \cdot x^{-1} = 1$.
- F9 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, για κάθε $x, y, z \in \mathcal{F}$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι τα τυπικά παραδείγματα της δομής του σώματος.