

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 2

Μητρώα

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

7 Οκτωβρίου 2025

1. Γραμμικά συστήματα και Μητρώα. Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\a_3x + b_3y + c_3z &= d_3\end{aligned}\tag{1}$$

με αγνώστους x, y, z μπορεί να παρασταθεί ως ισότητα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ ως

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix},\tag{2}$$

ή ισοδύναμα ως απόρροια των πράξεων των διανυσμάτων ως

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}y + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}z = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix},\tag{3}$$

ή σε ακόμη περισσότερο “κωδικοποιημένη” μορφή ως

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.\tag{4}$$

Το αντικείμενο

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

περιέχει καταχωρημένο σε κατάλληλη θέση τον συντελεστή κάθε αγνώστου κάθε εξίσωσης. Η πρώτη γραμμή περιέχει τους συντελεστές της πρώτης εξίσωσης, ή πρώτη στήλη τους συντελεστές του πρώτου αγνώστου και ούτω καθεξής. Η διάταξη αυτή μπορεί να ιδωθεί ως ένα πολύστηλο διάνυσμα και ονομάζεται **μητρώο**, ή **μήτρα** (matrix), ή και (όπως λανθασμένα έχει επικρατήσει) πίνακας. Επισημαίνουμε ότι ο τρόπος γραφής (4) του αρχικού συστήματος εμπεριέχει την πράξη του πολλαπλασιασμού του μητρώου των συντελεστών του συστήματος με το διάνυσμα των αγνώστων του συστήματος

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Συγκεκριμένα από την ισοδυναμία των (2), (3) και (4) προκύπτει

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Σημειώνουμε ότι το αρχικό σύστημα μπορεί να παρασταθεί με το μητρώο όλων των δεδομένων (data) του συστήματος, το **επαυξημένο** (augmented) μητρώο όπως ονομάζεται,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

στο οποίο, όπως και στην περίπτωση του μητρώου των συντελεστών, αναγνωρίζουμε τι περιέχει η κάθε γραμμή και η κάθε στήλη. Για παράδειγμα η πρώτη στήλη περιέχει τους συντελεστές του πρώτου αγνώστου με τη σειρά που εμφανίζονται σε κάθε εξίσωση του συστήματος, και ανάλογα η δεύτερη γραμμή περιέχει τα δεδομένα της δεύτερης εξίσωσης με τη σωστή σειρά παράθεσης.

Ορισμός 1

Έστω ότι τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, όπου γράφουμε

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Τη διάταξη-παράθεση

$$(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

λέμε **μητρώο** με n γραμμές και m στήλες, ή απλά $n \times m$ μητρώο. Λέμε επίσης ότι το μητρώο A έχει **διάσταση** $n \times m$. Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο γράφουμε $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.

Ορισμός 2

Το σύνολο των $n \times m$ μητρώων $A = (a_{ij})$ με $a_{ij} \in \mathcal{F}$, όπου $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, ή $\mathcal{F} = \mathbb{C}$, το σώμα των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών, συμβολίζουμε με $M^{n,m}(\mathcal{F})$. Πολλές φορές γράφουμε απλά $M^{n,m}$ αν δεν χρειάζεται να γίνει ιδιαίτερη αναφορά στο σώμα. Ενίοτε γράφουμε $\mathbb{R}^{n \times m}$ αντί του $M^{n,m}(\mathbb{R})$ και $\mathbb{C}^{n \times m}$ αντί του $M^{n,m}(\mathbb{C})$. Ένα $n \times n$ μητρώο λέγεται **τετραγωνικό**.

Παράδειγμα 1

Σύμφωνα με τον ορισμό τα

$$(a \ b \ c), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad (a)$$

είναι μητρώα διαστάσεων $1 \times 3, 2 \times 2, 3 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 1$, και 1×1 αντίστοιχα.

Ένα $n \times 1$ μητρώο είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$, ή στο $\mathbb{C}^n$. Πολλές φορές όταν δεν δημιουργείται σύγχυση ένα 1×1 μητρώο (a) μπορούμε να το ταυτίζουμε με τον αριθμό a .

2. Πράξεις μεταξύ μητρώων. Γενικεύοντας τις πράξεις διανυσμάτων πρόσθεση, και πολλαπλασιασμό με σταθερά, για $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ $n \times m$ μητρώα και λ μια σταθερά ορίζουμε

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

(7)

$$A - B = A + (-1)B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2m} - b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nm} - b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 3

Θα λέμε ότι τα μητρώα A και B είναι ίσα και θα γράφουμε $A = B$, εάν

- 1 έχουν την ίδια διάσταση, έστω $n \times m$, και
- 2 αν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$, τότε $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ και για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Με O συμβολίζουμε, για κάθε διάσταση, το μητρώο του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με 0. Έτσι αν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε $A + O = O + A = A$. Εδώ το O έχει διάσταση $n \times m$. Το O ονομάζουμε **μηδενικό μητρώο** ή απλά μηδέν.

Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένα $n \times m$ μητρώο γράφουμε

$$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_m), \quad \text{όπου} \quad \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων. Εάν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{R})$, και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, όπως στην (5), ορίζουμε το γινόμενο $\mathbf{Ab}$ με τη σχέση

$$\mathbf{Ab} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1m}b_m \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2m}b_m \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{nm}b_m \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Είναι εποικοδομητικό να θυμόμαστε ότι

$$\mathbf{Ab} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} b_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} b_m. \quad (9)$$

Γενικεύοντας το πολλαπλασιασμό, αν $A = (a_{ij})$ είναι ένα $n \times m$ μητρώο και $B = (b_{ij})$ είναι ένα $m \times k$ μητρώο γράφοντας $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_k)$ ορίζουμε το **γινόμενο** AB με τη σχέση

$$AB = (\mathbf{Ab}_1 \ \mathbf{Ab}_2 \ \cdots \ \mathbf{Ab}_k). \quad (10)$$

Έτσι το γινόμενο AB είναι το $n \times k$ μητρώο $C = AB$ με

$$C = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \cdots \ \mathbf{c}_k), \quad \text{όπου} \quad \mathbf{c}_j = A\mathbf{b}_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (11)$$

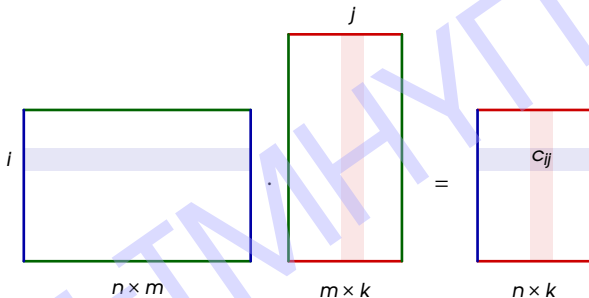
ειδικότερα αν $C = (c_{ij})$, τότε μέσω της (9) προκύπτει ότι

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}. \quad (12)$$

Σημείωση. Από τις (8) και (10) συνάγονται τα παρακάτω συμπεράσματα:

- 1 Το γινόμενο ενός $n \times m$ μητρώου με διάνυσμα του $\mathbb{R}^k$ ορίζεται μόνο αν $k = m$.
- 2 Το γινόμενο ενός $n \times m$ μητρώου με ένα $m \times k$ μητρώο είναι ένα $n \times k$ μητρώο, σχηματικά
$$(n \times m) \cdot (m \times k) \rightarrow n \times k$$
- 3 Εάν τα A και B είναι μητρώα συμβατών, όσον αφορά στον πολλαπλασιασμό μητρώων, διαστάσεων, και $C = AB$, τότε το στοιχείο c_{ij} είναι το γινόμενο του μητρώου “ i -γραμμή του A ” με το μητρώο “ j -στήλη του B ”, βλέπε (12).

$$AB = C$$



Σχήμα: Οπτικοποίηση του γινομένου μητρώων, η συμβατότητα στη διάσταση αποδίδεται με το ίδιο χρώμα. Η i -στήλη του μητρώου στα αριστερά πολλαπλασιάζεται την j -στήλη του μητρώου στα δεξιά για να δώσει το στοιχείο στην i -γραμμή και j -στήλη του γινομένου.

Παράδειγμα 2

Να υπολογισθούν τα a και b στο γινόμενο που ακολουθεί

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & a & \square \\ \square & b & \square & \square \end{pmatrix}.$$

Σημειώνουμε ότι το γινόμενο ορίζεται και είναι ένα 2×4 μητρώο.

Το a βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και στην τρίτη στήλη του γινομένου, άρα

$$a = (1 \ 2 \ -2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (1)(0) + (2)(1) + (-2)(-2) = 6.$$

Το b είναι στην δεύτερη γραμμή και στην δεύτερη στήλη του γινομένου, άρα

$$b = (2 \ 3 \ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = (2)(-1) + (3)(-3) + (0)(5) = -11.$$

Παρατήρηση 1

Παρατηρείστε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix},$$

τότε

$$AP = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 p_1 + b_1 p_2 + c_1 p_3 & a_1 q_1 + b_1 q_2 + c_1 q_3 \\ a_2 p_1 + b_2 p_2 + c_2 p_3 & a_2 q_1 + b_2 q_2 + c_2 q_3 \end{pmatrix}$$

ενώ

$$PA = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 a_1 + q_1 a_2 & p_1 b_1 + q_1 b_2 & p_1 c_1 + q_1 c_2 \\ p_2 a_1 + q_2 a_2 & p_2 b_1 + q_2 b_2 & p_2 c_1 + q_2 c_2 \\ p_3 a_1 + q_3 a_2 & p_3 b_1 + q_3 b_2 & p_3 c_1 + q_3 c_2 \end{pmatrix}$$

κατά συνέπεια $AP \neq PA$ αφού δεν έχουν την ίδια διάσταση.

Παράδειγμα 3

Αν

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

τότε

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

οπότε $AB \neq BA$.

Παρατήρηση 2

Εάν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε γράφοντας, κατ' εξαίρεση, $O_{p \times q}$ το μηδενικό μητρώο διάστασης $p \times q$, έχουμε

❶ $O_{k \times n} A = O_{k \times m}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

❷ $A O_{m \times l} = O_{n \times l}$, για κάθε $l \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση 3

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή το τετραγωνικό $n \times n$ μητρώο $I = (i_{ij})$ με $i_{ii} = 1$, και $i_{ij} = 0$ για $i \neq j$, για κατάλληλο n , συμπεριφέρεται όπως το 1 στον πολλαπλασιασμό.

Ορισμός 4

Το τετραγωνικό $n \times n$ μητρώο $I = (\delta_{ij})$, όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, ($\delta_{ii} = 1$ και $\delta_{ij} = 0$, εάν $i \neq j$) θα το λέμε **ταυτοτικό μητρώο** (identity matrix) και θα το συμβολίζουμε με I ή με I_n αν χρειάζεται να δηλωθεί η διάσταση.

Εάν το A είναι τετραγωνικό μητρώο ορίζουμε για $n = 0, 1, 2, \dots$ τις **δυνάμεις** του A

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^{n+1} = AA^n.$$

Έτσι αν το A είναι τετραγωνικό μητρώο και m και n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, τότε

$$\begin{aligned} A^m A^n &= \underbrace{AA \cdots AA}_{m \text{ φορές}} \underbrace{AA \cdots AA}_{n \text{ φορές}} = A^{m+n} \\ (A^m)^n &= \underbrace{A^m A^m \cdots A^m}_{n \text{ φορές}} = A^{mn}. \end{aligned}$$

Πολυώνυμο μητρώων. Αν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο και m και n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι ορίζεται το μητρώο-γραμμικός συνδυασμός

$$\lambda A^m + \mu A^n$$

με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, είναι τετραγωνικό μητρώο. Έτσι αν p είναι ένα πολυώνυμο, για παράδειγμα αν $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$, ορίζεται το μητρώο $p(A)$ με τη σχέση

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n.$$

Παράδειγμα 4

Έστω A ένα τετραγωνικό μητρώο, και $p(t) = 1 + t^2$. Εάν το A είναι “ρίζα” του p , δηλαδή $p(A) = O$, να υπολογισθούν οι θετικές δυνάμεις του μητρώου A .

Από τη σχέση $p(A) = O$ βρίσκουμε

$$I + A^2 = O \Rightarrow A^2 = -I,$$

έτσι από τις ιδιότητες των δυνάμεων μητρώου για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ υπολογίζουμε

$$A^{2n} = (A^2)^n = (-I)^n = (-1)^n I$$

$$A^{2n+1} = A^{2n} A = (-1)^n I A = (-1)^n A,$$

έτσι $A^{10} = (A^2)^5 = (-1)^5 I = -I$, $A^{15} = (A^2)^7 A = (-1)^7 I A = -A$, κλπ.

Άσκηση 1

Να βρεθούν όλα τα 2×2 πραγματικά μητρώα που ικανοποιούν την εξίσωση $I + A^2 = O$, όπου O είναι το μηδενικό μητρώο.

Πρόταση 1

Εάν τα μητρώα A, B, C έχουν διατάξεις ώστε η κάθε μια από τις πράξεις να μπορεί να εκτελεστεί, και λ, μ είναι σταθερές, τότε ισχύουν οι νόμοι

- ❶ $A + B = B + A$
- ❷ $A + (B + C) = (A + B) + C$
- ❸ $A(BC) = (AB)C$
- ❹ $A(B + C) = AB + AC$
- ❺ $(A + B)C = AC + BC$
- ❻ $\lambda A = A\lambda$
- ❼ $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- ❽ $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- ❾ $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$

3. Το ανάστροφο μητρώο

Ορισμός 5

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο ορίζουμε το **ανάστροφο** μητρώο του A , το οποίο συμβολίζουμε με A^T , να είναι το $m \times n$ μητρώο του οποίου οι στήλες είναι οι γραμμές του A με την ίδια διάταξη, δηλαδή η πρώτη στήλη του A^T είναι η πρώτη γραμμή του A , η δεύτερη στήλη του A^T είναι η δεύτερη γραμμή του A και ούτω καθεξής.

Έτσι αν $A = (a_{ij})$, τότε $A^T = (a'_{ij})$, όπου

$$a'_{ij} = a_{ji},$$

κατά συνέπεια

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & -1 & -4 \\ 9 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 5

Εάν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ 0 \ -2), \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

από τον ορισμό του ανάστροφου μητρώου βρίσκουμε

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C^T = (1 \ 0 \ -2).$$

Παρατηρούμε ότι αφενός $C = B^T$ και $C^T = B$ και αφετέρου ότι $(C^T)^T = B^T = C$.
Επιπλέον

$$C^T C = (1 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = (1 + 0 + 4) = (5) = 5$$

ως 1×1 μητρώο, ενώ

Παράδειγμα 5 (συνέχεια)

$$CC^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ -2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 0 & (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα 1

Εάν A και B είναι μητρώα καταλλήλων διαστάσεων ώστε οι σχετικές πράξεις να μπορούν να εκτελεστούν, τότε

- ❶ $(A^T)^T = A$.
- ❷ $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- ❸ $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, για κάθε σταθερά λ .
- ❹ $(AB)^T = B^T A^T$.

Παρατηρούμε ότι

$$(A^2)^T = (AA)^T = A^T A^T = (A^T)^2$$

κατά συνέπεια για $n = 0, 1, 2, \dots$ είναι $(A^n)^T = (A^T)^n$ (γιατί:).

Παρατήρηση 4

Ένα $n \times 1$ πραγματικό μητρώο A είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ και

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \Rightarrow A = (A^T)^T = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^T$$

όπως γράψαμε ένα διάνυσμα-γραμμή στο $\mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$A^T A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \quad (13)$$

το οποίο είναι αριθμός ως 1×1 μητρώο ή διάνυσμα. Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, κατανοώντας την πράξη $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ ως γινόμενο μητρώων θα γράφουμε

Παρατήρηση 4 (συνέχεια)

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Θυμίζει κάτι αυτό το αποτέλεσμα; Έτσι αν $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}.$$

Αν M είναι ένα τυπικό μητρώο ας συμβολίσουμε με M_{i*} την i γραμμή του M , ως διάνυσμα-στήλη και με M_{*j} την j στήλη του M ως διάνυσμα. Αν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο και B ένα $m \times k$ μητρώο, τότε το γινόμενο AB μπορεί να γραφεί ως

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1*}^T B_{*1} & A_{1*}^T B_{*2} & \cdots & A_{1*}^T B_{*k} \\ A_{2*}^T B_{*1} & A_{2*}^T B_{*2} & \cdots & A_{2*}^T B_{*k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n*}^T B_{*1} & A_{n*}^T B_{*2} & \cdots & A_{n*}^T B_{*k} \end{pmatrix} = (A_{i*}^T B_{*j}). \quad (14)$$

Ορισμός 6

Ένα τετραγωνικό μητρώο A για το οποίο ισχύει $A^T = A$ λέγεται **συμμετρικό**.

Ας θεωρήσουμε ένα $n \times n$ μητρώο $A = (a_{ij})$, τότε $A^T = (a'_{ij})$ με $a'_{ij} = a_{ji}$ (η i -γραμμή του A^T είναι η i -στήλη του A και η j -στήλη του A^T είναι η j -γραμμή του A). Έτσι αν το A είναι συμμετρικό, τότε

$$a_{ij} = a'_{ij} = a_{ji}$$

για όλα τα i, j , συνεπώς ένα τέτοιο μητρώο είναι συμμετρικό ως προς την κύρια διαγώνιό του, γεγονός που δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό συμμετρικό. Για παράδειγμα το

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

είναι συμμετρικό.

Άσκηση 2

Εάν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο δείξτε ότι το καθένα από τα μητρώα $A^T A$ και AA^T ορίζεται και είναι συμμετρικό.