

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 12

Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση

Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

17 Δεκεμβρίου 2024

1. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Για ένα τετραγωνικό μητρώο A συμβαίνει να υπάρχουν χαρακτηριστικά μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{x}$ ώστε

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (1)$$

όπου λ είναι κάποια σταθερά. Για παράδειγμα για

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

έχουμε ότι

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_1, \quad \lambda = 1$$

και

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}_2, \quad \lambda = 2.$$

Η σχέση (1) δηλώνει ότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του μητρώου με ένα τέτοιο διάνυσμα είναι ένα συγγραμικό διάνυσμα, στην κατεύθυνση του αρχικού αν $\lambda > 0$, ή στην αντίθετη αν $\lambda < 0$.

Ορισμός 1

Έστω A ένα $n \times n$ μητρώο. Αν για κάποια σταθερά λ υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ ώστε $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, η σταθερά λ λέγεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του A και το μη μεδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Λόγω της γεωμετρικής ιδιότητας που εκφράζει η (1) είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πώς να βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ενός τετραγωνικού μητρώου. Γράφοντας τη φαινομενικά παράξενη εξίσωση (1) στη μορφή

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

βλέπουμε αμέσως ότι το ζητούμενο σχετίζεται με την επίλυση ενός συστήματος το οποίο εξαρτάται από μια παράμετρο, συνεπώς

- 1 Η σταθερά λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν το μητρώο $A - \lambda I$ είναι μη αντιστρέψιμο.
- 2 Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν είναι μη μηδενική λύση του συστήματος $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Έτσι, ως αποτέλεσμα, της θεωρίας που έχουμε αναπτύξει, έχουμε

Θεώρημα 1

Αν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο, τότε

- 1 Ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν είναι λύση της εξίσωσης $\det(A - \lambda I) = 0$.
- 2 Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν είναι μη μηδενικό στοιχείο του μηδενόχωρου του $A - \lambda I$.

Παρατηρείστε ότι αν το $\mathbf{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A το οποίο αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή, έστω λ , και c είναι μια μη μηδενική σταθερά, από την (1) έπεται ότι

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow c(A\mathbf{x}) = c(\lambda\mathbf{x})$$

κατά συνέπεια

$$(cA)\mathbf{x} = (c\lambda)\mathbf{x}$$

$$A(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$$

ισοδύναμα, το $\mathbf{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του cA το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $c\lambda$, και η λ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $c\mathbf{x}$.

Παράδειγμα 1

Για το μητρώο, στη 1η διαφάνεια,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

διαμορφώνοντας την εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0$ υπολογίζουμε

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2,$$

επομένως οι λύσεις της

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ισοδύναμα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$. Για τα ιδιοδιανύσματα διαμορφώνουμε τα συστήματα

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

για $\lambda = 1, 2$. Έτσι επιλύουμε

$$\lambda = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_1 = -3s, \quad x_2 = s$$

$$\lambda = 2, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_1 = t, \quad x_2 = 0$$

όπου $s, t \in \mathbb{R}$. Για $s = t = 1$ βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση 1

Για ένα $n \times n$ μητρώο A η $\det(A - \lambda I)$ είναι ένα πολυώνυμο του λ βαθμού n με μεγιστοβάθμιο όρο τον $(-1)^n \lambda^n$. Από τις ιδιότητες της ορίζουσας έχουμε

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (-1)^n \det(A - \lambda I) \\ &= (-1)^n [(-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} \dots] \\ &= \lambda^n + c'_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots \end{aligned} \tag{3}$$

Ορισμός 2

Για το $n \times n$ μητρώο A ορίζουμε το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** (characteristic polynomial) του A με τη σχέση

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A). \quad (4)$$

Πολλές φορές γράφουμε απλά $p(\lambda)$ για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Η επιλογή να ορίζεται ως χαρακτηριστικό πολυώνυμο η έκφραση $\det(\lambda I - A)$ και όχι η $\det(A - \lambda I)$ γίνεται ώστε ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του πολυωνύμου να είναι το 1.

Πόρισμα 1

Αν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, ισοδύναμα οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0. \quad (5)$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Διαμορφώνοντας την χαρακτηριστική εξίσωση υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 4),$$

κατά συνέπεια οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ και $\lambda_3 = 4$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα του A . Για $\lambda = 3$ έχουμε

$$(3I - A)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -4x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

όπου $r, s \in \mathbb{R}$, ενώ για $\lambda = 4$ βρίσκουμε

$$(4I - A)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - 4x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ 4t \\ t \end{pmatrix},$$

όπου $t \in \mathbb{R}$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$ είναι της μορφής

$$\mathbf{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ισοδύναμα ο μηδενόχωρος του $3I - A$ έχει διάσταση δύο (γιατί;). Έτσι μπορούμε να πάρουμε ως ιδιοδιανύσματα, που αντιστοιχούν στις $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$ και $\lambda_3 = 4$, τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

επιλέγοντας, αντίστοιχα, $(r = 1 \text{ και } s = 0)$, $(r = 0 \text{ και } s = 1)$, και $(t = 1)$.

Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ στο Παράδειγμα (2) είναι γραμμικά ανεξάρτητα, κατά συνέπεια αποτελούν μια βάση για τον $\mathbb{R}^3$.

2. Ιδιόχωροι

Ορισμός 3

Εάν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο και λ είναι μια ιδιοτιμή του A , ο μηδενόχωρος $\text{null}(\lambda I - A)$ λέγεται **ιδιόχωρος** (eigenspace) του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Η διάσταση του ιδιόχωρου $\text{null}(\lambda I - A)$ λέγεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** (geometric multiplicity) της ιδιοτιμής λ .

Παρατήρηση 2

Για ένα πολυώνυμο p βαθμού n με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές με ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$, ξένες μεταξύ τους, με $m \leq n$, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $k_1, k_2, \dots, k_m$ ώστε

$$p(x) = a(x - \rho_1)^{k_1}(x - \rho_2)^{k_2} \cdots (x - \rho_m)^{k_m}, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$

Ο θετικός ακέραιος k_j λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** (algebraic multiplicity) της ρίζας $\rho_j, j = 1, 2, \dots, m$.

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$\rho_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 4).$$

- Ιδιοτιμές του A : $\lambda_1 = 3$ με αλγεβρική πολλαπλότητα δύο και $\lambda_2 = 4$ με αλγεβρική πολλαπλότητα ένα.
- Ιδιοδιανύσματα του A : Για $\lambda = 3$ έχουμε

$$(3I - A)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -4x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

όπου $s \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda = 4$ βρίσκουμε

$$(4I - A)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - 4x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4t \\ 4t \\ t \end{pmatrix}, \quad (7)$$

όπου $t \in \mathbb{R}$. Έτσι ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda = 3$ είναι ο

$$\mathcal{E}_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (8)$$

ισοδύναμα η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = 3$ είναι ένα, και ο ιδιόχωρος για την $\lambda = 4$ είναι ο

$$\mathcal{E}_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (9)$$

κατά συνέπεια η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 4$ είναι επίσης ένα.

3. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

και παρατηρούμε τα εξής:

- ❶ Ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου-δευτεροβάθμιου όρου λ^2 είναι η μονάδα, όπως έχουμε ήδη συζητήσει.
- ❷ Ο συντελεστής του πρωτοβάθμιου όρου λ είναι το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του A επί -1 , ισοδύναμα το $-$ ίχνος του A , $-\text{tr } A$.
- ❸ Ο σταθερός όρος είναι η ορίζουσα του A , $\det A$, αποτέλεσμα το οποίο προκύπτει, εξάλλου, και από τον ορισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$p_A(0) = \det(O - A) = \det(-A) = (-1)^2 \det A = \det A. \quad (10)$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A \quad (11)$$

Επιπλέον αν λ_1 και λ_2 είναι οι ιδιοτιμές του A , από το Πρόγραμμα 1 έπεται ότι

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \quad (12)$$

Συμπέρασμα. Συγκρίνοντας τις (11) και (12) βλέπουμε ότι

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (13)$$

$$\det A = \lambda_1\lambda_2. \quad (14)$$

Τα αποτελέσματα αυτά γενικεύονται για μητρώα μεγαλύτερου μεγέθους.

Θεώρημα 2

Έστω A ένα $n \times n$ μητρώο και έστω

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A . Εάν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι, όχι αναγκαστικά ξένες μεταξύ τους, ιδιοτιμές του A , τότε

$$c_{n-1} = -\operatorname{tr} A = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n). \quad (15)$$

$$c_0 = (-1)^n \det A = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \quad (16)$$

Μια άμεση συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι το

Θεώρημα 3

Το $n \times n$ μητρώο A είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του.

4. Το θεώρημα Cayley-Hamilton

Εάν A είναι ένα $n \times n$ μητρώο και $p_A(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A , μας ενδιαφέρει το ιδιαίτερο μητρώο

$$p_A(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1A + c_0I.$$

Ας υπολογίσουμε αυτό το μητρώο για ένα τυπικό 2×2 A . Στη περίπτωση αυτή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A$, επομένως

$$\begin{aligned} p_A(A) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα δεν είναι τυχαίο, και μάλιστα ισχύει για κάθε τετραγωνικό μητρώο οποιουδήποτε μεγέθους και αυτό εκφράζει το διάσημο θεώρημα των Cayley και Hamilton.

Θεώρημα 4 (Cayley-Hamilton)

Κάθε τετραγωνικό μητρώο μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, δηλαδή αν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο και $p_A(\lambda)$ είναι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, τότε το μητρώο $p_A(A)$ είναι το μηδενικό.

Μια από τις συνέπειες του θεωρήματος είναι ότι δυνάμεις ενός μητρώου μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί διαδοχικών δυνάμεων του ίδιου μητρώου.

Πόρισμα 2

Εάν $p_A(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός $n \times n$ μητρώου A , τότε

- 1 $A^n = -c_{n-1}A^{n-1} - \dots - c_1A - c_0I$.
- 2 $A^{k+n} = -c_{n-1}A^{k+n-1} - \dots - c_1A^{k+1} - c_0A^k$, για κάθε φυσικό αριθμό k .
- 3 Εάν το A είναι αντιστρέψιμο, τότε

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \dots + c_1I). \quad (17)$$

5. Διαγωνοποίηση μητρώα

Ας υποθέσουμε ότι το 3×3 μητρώο A έχει τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, τότε οι επιμέρους σχέσεις $A\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$, με $k = 1, 2, 3$, συμπύσσονται στην

$$(A\mathbf{x}_1 \ A\mathbf{x}_2 \ A\mathbf{x}_3) = (\lambda_1 \mathbf{x}_1 \ \lambda_2 \mathbf{x}_2 \ \lambda_3 \mathbf{x}_3) \Leftrightarrow$$
$$A(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

έτσι γράφοντας Λ για το διαγώνιο μητρώο με τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ στη διαγώνιο και X για το μητρώο με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ έχουμε

$$AX = X\Lambda \Rightarrow A = X\Lambda X^{-1}, \quad (18)$$

αφού οι στήλες του X είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Ένα από τα πλεονεκτήματα της δυνατότητας γραφής του μητρώου όπως στην (18) είναι ο υπολογισμός δυνάμεων του A . Πράγματι

$$A^2 = (X\Lambda X^{-1})^2 = (X\Lambda X^{-1})(X\Lambda X^{-1}) = X\Lambda^2 X^{-1}$$

και επαγωγικά

$$A^n = X \Lambda^n X^{-1} = X \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} X^{-1},$$

κατά συνέπεια ο υπολογισμός δυνάμεων του A προκύπτει με απλή παρατήρηση.

Ορισμός 4

Ένα τετραγωνικό μητρώο A λέγεται **διαγωνοποιήσιμο** (diagonalizable) εάν υπάρχουν διαγώνιο μητρώο D και αντιστρέψιμο μητρώο M , ιδίου μεγέθους με το A , ώστε

$$A = MDM^{-1}. \quad (19)$$

Αν ένα τετραγωνικό μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο, από την (19) έπεται ότι

$$AM = MD$$

όπου $D = \text{diag}(d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n)$ και $M = (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n)$ με

$$A\xi_k = d_k \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

κατά συνέπεια η ιδιότητα της διαγωνοποιησιμότητας μητρώου σχετίζεται άμεσα με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου.

Θεώρημα 5

Εάν το $n \times n$ μητρώο A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε είναι διαγωνοποιήσιμο. Συγκεκριμένα αν Λ είναι το διαγώνιο μητρώο με τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ στην κύρια διαγώνιο και X είναι το μητρώο με στήλες τα αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, τότε

$$A = X\Lambda X^{-1}. \quad (20)$$

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν το $n \times n$ μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο, τότε έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Απόδειξη

Αν το μητρώο A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε η (20) είναι η γενίκευση του αποτελέσματος στην αρχή της παραγράφου. Αν το A είναι διαγωνοποιήσιμο και $A = MDM^{-1}$ με D διαγώνιο, τότε $AM = MD$, κατά συνέπεια οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του M είναι ιδιοδιανύσματα του A με αντίστοιχες ιδιοτιμές τα αντίστοιχα διαγώνια στοιχεία του D . ■

Παράδειγμα 4

Στο Παράδειγμα (3) δείξαμε ότι το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ και $\lambda_3 = 4$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Έτσι

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

κατά συνέπεια, δεδομένου ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Το φυσιολογικό ερώτημα που εγείρεται είναι πότε τα ιδιοδιανύσματα ενός μητρώου είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα 6

Ιδιοδιανύσματα ενός μητρώου τα οποία αντιστοιχούν σε ξένες μεταξύ τους ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 6 με εκείνο του Θεωρήματος 5 έχουμε τελικά το

Θεώρημα 7

Το $n \times n$ μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο αν και μόνο αν η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με τη γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής. Ειδικά αν η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με ένα, δηλαδή οι ιδιοτιμές είναι ξένες μεταξύ τους, τότε το μητρώο είναι διαγωνοποιήσιμο.

Παράδειγμα 5

Εξετάστε αν το μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Είναι

$$\rho_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) + 1 = (\lambda - 3)^2,$$

επομένως το A έχει μία ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα δύο. Για τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα επιλύουμε το σύστημα

$$(3I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2,$$

έτσι ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι

$$\mathcal{E} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

έχει δηλαδή διάσταση ένα, ισοδύναμα γεωμετρική πολλαπλότητα του $\lambda <$ αλγεβρική πολλαπλότητα του λ , συνεπώς το A δεν διαγωνοποιείται.

6. Ορθογώνια διαγωνοποίηση

Ας υποθέσουμε ότι ένα τετραγωνικό μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο και το μητρώο που υλοποιεί την διαγωνοποίηση είναι ορθογώνιο ισχύει δηλαδή ότι

$$A = PDP^{-1} = PDP^T,$$

όπου το D είναι διαγώνιο. Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε αυτού του τύπου τα μητρώα.

Ορισμός 5

Ένα τετραγωνικό μητρώο A λέγεται **ορθογώνια διαγωνοποιήσιμο** (orthogonally diagonalizable) εάν υπάρχουν διαγώνιο μητρώο D και ορθογώνιο μητρώο Q , ώστε

$$A = QDQ^T. \quad (21)$$

Θεώρημα 8

Εάν A είναι ένα ορθογώνια διαγωνοποιήσιμο μητρώο, τότε το A είναι συμμετρικό.

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύουμε ότι αν το A είναι πραγματικό τότε ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ένα συμμετρικό, πραγματικό μητρώο είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμο.

Ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές κάλλιστα μπορεί να έχει μιγαδικές ρίζες, κατά συνέπεια ένα πραγματικό μητρώο μπορεί να έχει μιγαδικές ιδιοτιμές, επομένως και μιγαδικά ιδιοδιανύσματα. Αντιμετωπίζοντας μιγαδικές ποσότητες και προκειμένου η ευκλείδεια νόρμα να παράγεται από εσωτερικό εργαζόμαστε στο $\mathbb{C}^n$ με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i,$$

Θυμίζουμε ότι ένας αριθμός a είναι πραγματικός αν και μόνο αν είναι ίσος με τον συζυγή του $\bar{a}$. Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένα συμμετρικό, πραγματικό μητρώο, τότε

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}) = (a_{ij}) = A$$

και

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (A\mathbf{u})^T \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{u}^T A^T \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{u}^T A \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{u}^T \bar{A} \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{u}^T \bar{A} \bar{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle \quad (22)$$

Θεώρημα 9

Εάν το A είναι ένα συμμετρικό, πραγματικό μητρώο, τότε

- 1 Όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί.
- 2 Σε κάθε ιδιοτιμή του αντιστοιχεί ένα πραγματικό ιδιοδιάνυσμα.
- 3 Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ξένες μεταξύ τους ιδιοτιμές του A είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Ισοδύναμη διατύπωση του αποτελέσματος (3) του Θεωρήματος: Εάν $\lambda_i \neq \lambda_j$ είναι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού, πραγματικού μητρώου A , τότε οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους, ισοδύναμα

$$\text{null}(\lambda_i I - A) \perp \text{null}(\lambda_j I - A), \quad \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (23)$$

Θεώρημα 10

Έστω A ένα συμμετρικό, πραγματικό μητρώο, και έστω $\mathbf{x}$ ένα ιδιοδιάνυσμα του A . Εάν $\mathbf{v}$ είναι ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο $\mathbf{x}$, τότε και το $A\mathbf{v}$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{x}$.

Θεώρημα 11 (το Φασματικό Θεώρημα)

Ένα πραγματικό $n \times n$ μητρώο είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμο αν και μόνο αν είναι συμμετρικό.

Εάν το A είναι ένα $n \times n$ συμμετρικό, πραγματικό μητρώο, τότε υπάρχουν ορθογώνιο μητρώο Q και διαγώνιο μητρώο D ώστε $A = QDQ^T$, ισοδύναμα $AQ = QD$,

$$A(\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n) = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$
$$(A\mathbf{u}_1 \ A\mathbf{u}_2 \ \cdots \ A\mathbf{u}_n) = (d_1\mathbf{u}_1 \ d_2\mathbf{u}_2 \ \cdots \ d_n\mathbf{u}_n)$$

κατά συνέπεια

$$A\mathbf{u}_j = d_j\mathbf{u}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

Συνεπώς κάθε πραγματικό συμμετρικό $n \times n$ μητρώο έχει n ορθογώνια μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα, ισοδύναμα παράγει μια ορθοκανονική βάση στον $\mathbb{R}^n$.

Παρόμοια από την αρχική σχέση $A = QDQ^T$ παίρνουμε

$$A = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix} = (d_1 \mathbf{u}_1 \ d_2 \mathbf{u}_2 \ \cdots \ d_n \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix}$$

ισοδύναμα

$$A = d_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + d_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + d_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T \quad (25)$$

Κάθε υπόχωρος $\text{span}\{\mathbf{u}_j\}$ είναι μια ευθεία δια του $\mathbf{0}$, ένας άξονας, και κάθε μητρώο $\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T$ είναι το μητρώο προβολής του $\mathbb{R}^n$ επί του υπόχωρου $\text{span}\{\mathbf{u}_j\}$. Συνεπώς η (25) εκφράζει το μητρώο A ως γραμμικό συνδυασμό προβολών επί n το πλήθος ορθογώνιων αξόνων στον $\mathbb{R}^n$ με βάρη τις ιδιοτιμές του A . Έτσι αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= d_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T \mathbf{x} + d_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T \mathbf{x} + \cdots + d_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T \mathbf{x} \\ &= d_1 \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{x} + d_2 \text{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{x} + \cdots + d_n \text{proj}_{\mathbf{u}_n} \mathbf{x}, \end{aligned}$$

αφού $\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_j = 1$. Η σχέση (25) λέγεται **φασματική διάσπαση** (spectral decomposition) του A και αποκαλύπτει τη δράση του A επί κάθε διανύσματος $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 6

Το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

είναι συμμετρικό, επομένως υπάρχει ορθογώνιο μητρώο Q που το διαγωνοποιεί. Στις διαφάνειες 33 – 35 δείχνουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, και $\lambda_3 = 8$. Μια βάση για τον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 2$ αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ενώ ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 8$ παράγεται από το

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ενώ το $\mathbf{u}_3$ είναι ορθογώνιο στα $\mathbf{u}_1$ και $\mathbf{u}_2$ τα δύο τελευταία δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Με τη διαδικασία ορθοκανονικοποίησης βρίσκουμε

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

οπότε

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Αν

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

η βάση $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι ορθοκανονική.

Κατά συνέπεια το ζητούμενο μητρώο είναι το $Q = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)$. Έτσι όπως εύκολα επαληθεύεται

$$A = Q\Lambda Q^T,$$

ή

$$A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

7. Όμοια μητρώα

Ορισμός 6

Εάν A και B είναι τετραγωνικά μητρώα θα λέμε ότι το A είναι **όμοιο** (similar) με το B εάν υπάρχει αντιστρέψιμο μητρώο M ώστε $A = MBM^{-1}$. Αν το A είναι όμοιο με το B γράφουμε $A \sim B$.

Υπό αυτή την έννοια, ένα τετραγωνικό μητρώο είναι διαγωνοποιήσιμο αν και μόνο αν είναι όμοιο με ένα διαγώνιο μητρώο. Παρατηρούμε ότι

- 1 $A \sim A$, αφού $A = IAI^{-1}$.
- 2 Αν $A \sim B$, τότε $B \sim A$, πράγματι αν $A = MBM^{-1}$, τότε

$$B = M^{-1}AM = N^{-1}AN, \quad (N = M^{-1}).$$

- 3 Αν $A \sim B$ και $B \sim C$, τότε $A \sim C$, πράγματι

$$\left. \begin{array}{l} A = MBM^{-1} \\ B = NCN^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow A = M(NCN^{-1})M^{-1} = (MN)C(MN)^{-1}.$$

Θεώρημα 12

Εάν τα μητρώα A και B είναι όμοια, τότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Σχετικά με το Παράδειγμα 6:

Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του είναι

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & \lambda - 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4)[(\lambda - 4)^2 - 4] + 4[-2(\lambda - 4) - 4] \\ &= (\lambda - 4)(\lambda - 6)(\lambda - 2) - 8(\lambda - 2) = \dots = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8). \end{aligned}$$

Ιδιοτιμές. Είναι οι $\lambda = 2$, με αλγεβρική πολλαπλότητα δύο, και $\lambda = 8$ με αλγεβρική πολλαπλότητα ένα.

Ιδιόχωροι. Για $\lambda = 2$ επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0,$$

επομένως ως ιδιοδιάνυσμα παίρνουμε το

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\xi_2 - \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\xi_3 \\ 0 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Τα δύο διανύσματα που συνθέτουν το $\mathbf{x}$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ως γραμμικά ανεξάρτητα αποτελούν μια βάση για τον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 2$, συνεπώς αλγεβρική πολλαπλότητα δύο.

Για $\lambda = 8$ επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \xi_1 = \xi_2 = \xi_3,$$

παρατηρώντας ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του μητρώου είναι ίσο με το μηδέν, επομένως ως ιδιοδιάνυσμα παίρνουμε το

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

το οποίο σύμφωνα με το Θεώρημα 9 είναι ορθογώνιο στα $\mathbf{u}_1$ και $\mathbf{u}_2$. Έτσι θα έχουμε

$$A = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3) \operatorname{diag}(2 \ 2 \ 8) (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3)^{-1}$$
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$