

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 11

Η Ορίζουσα

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

10 Δεκεμβρίου 2024

Η Ορίζουσα

Έχουμε αναφερθεί στην ορίζουσα 2×2 μητρώου. Γενικά η ορίζουσα είναι μία συνάρτηση ορισμένη στο χώρο των τετραγωνικών μητρώων $M^{n,n}(\mathbb{K})$ με τιμές στο $\mathbb{K}$,

$$\det : M^{n,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να ορισθεί η ορίζουσα. Επιλέγουμε έναν επαγωγικό ο οποίος την ίδια στιγμή δίνει και την αριθμητική τιμή της ορίζουσας.

1. Η 2×2 ορίζουσα

Ορισμός 1

Ορίζουμε την **ορίζουσα** (determinant) του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ως το βαθμωτό μέγεθος $ad - bc$ και γράφουμε

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Την ορίζουσα του A συμβολίζουμε και με $|A|$.

Είδαμε ότι η ορίζουσα ενός 2×2 μητρώου A παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο και δίνει διάφορες πληροφορίες για το μητρώο. Για παράδειγμα, είδαμε ότι αν $\det A \neq 0$, τότε υπάρχει το αντίστροφο μητρώο A^{-1} , επιπλέον

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ορίζουσα ενός 2×2 , αλλά και γενικότερα ενός $n \times n$ μητρώου όπως θα δούμε, δίνει πληροφορία για

- 1 την αντιστρεψιμότητα του μητρώου, ισοδύναμα
- 2 την γραμμική ανεξαρτησία των στηλών του μητρώου, ισοδύναμα
- 3 την γραμμική ανεξαρτησία των γραμμών του μητρώου, ισοδύναμα
- 4 την τάξη του μητρώου.

1.1. Ιδιότητες της ορίζουσας

- ❶ Η ορίζουσα του ταυτοτικού μητρώου είναι ίση με 1.
- ❷ Η ορίζουσα μητρώου αλλάζει πρόσημο εάν εναλλάξουμε τις γραμμές του μητρώου.

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - da = -(ad - bc) = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

- ❸ Η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή του μητρώου.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+p & b+q \\ c & d \end{vmatrix} &= (a+p)d - (b+q)c \\ &= (ad - bc) + (pd - qc) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ c & d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

και

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Η ορίζουσα μητρώου είναι ίση με την ορίζουσα του ανάστροφου μητρώου.
Πράγματι

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A^T = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det A.$$

Παρατήρηση 1

Από τις ιδιότητες (ο2) και (ο3) έπεται ότι η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από την δεύτερη γραμμή του μητρώου, αφού

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+p & d+q \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c+p & d+q \\ a & b \end{vmatrix} = - \left(\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ a & b \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}$$

και

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \lambda c & \lambda d \\ a & b \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Συνεπώς η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη ή δεύτερη γραμμή του μητρώου κρατώντας την άλλη γραμμή σταθερή.

Παρατήρηση 2

Επίσης από την ιδιότητα (ο4) έπεται ότι οποιοδήποτε συμπέρασμα αφορά στις γραμές μητρώου ισχύει και για τις στήλες. Για παράδειγμα εναλλάσσοντας δύο στήλες αλλάζει το πρόσημο

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

και όσον αφορά στη γραμμικότητα

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+\lambda p & b \\ c+\lambda q & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+\lambda p & c+\lambda q \\ b & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} p & q \\ b & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ένα 2×2 μητρώο A μπορούμε να το γράψουμε ως

$$A = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \end{pmatrix},$$

όπου $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ είναι οι στήλες του A ως διανύσματα, και $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ οι γραμμές του A ως διανύσματα (στήλες). Σχετικά με την Παρατήρηση 2 αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ και γράψουμε $r_a = \mathbf{a}^T$, $r_b = \mathbf{b}^T$, και $r_c = \mathbf{c}^T$, τότε

$$\det(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \ \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a} \ \mathbf{c}) + \lambda \det(\mathbf{b} \ \mathbf{c}) \quad (1)$$

$$\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} + \lambda \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b}) + \lambda \det(\mathbf{a} \ \mathbf{c}), \quad (2)$$

$$\det \begin{pmatrix} r_a + \lambda r_b \\ r_c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_a \\ r_c \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} r_b \\ r_c \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\det \begin{pmatrix} r_a \\ r_b + \lambda r_c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_a \\ r_b \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} r_a \\ r_c \end{pmatrix}, \quad (4)$$

γεγονός που εκφράζει ότι η ορίζουσα είναι γραμμική ως προς κάθε στήλη ξεχωριστά, ή ως προς κάθε γραμμή ξεχωριστά.

Παρατήρηση 3

Αναρωτιόμαστε αν είναι σωστό, και προκύπτει από τις ιδιότητες της ορίζουσας που αναφέραμε, ότι $\det(A + B) = \det A + \det B$. Ας το ελέγξουμε. Για

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

και λ μια σταθερά, από τη γραμμικότητα της ορίζουσας ως προς κάθε γραμμή ξεχωριστά, υπολογίζουμε

$$\det(\lambda A) = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda^2 \det A. \quad (5)$$

Έτσι για $\lambda = 2$ έχουμε

$$\det(A + A) = \det(2A) = 4\det A \neq 2\det A = \det A + \det A,$$

κατά συνέπεια

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

Θεώρημα 1 (Ιδιότητες της ορίζουσας)

Έστω A ένα 2×2 μητρώο.

- Ο1 Η ορίζουσα του ταυτοτικού μητρώου είναι ίση με 1.
- Ο2 Εάν το μητρώο A' προκύπτει από το A με εναλλαγή των γραμμών του, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο, δηλαδή $\det A' = -\det A$.
- Ο3 Η ορίζουσα μητρώου ως συνάρτηση είναι γραμμική ξεχωριστά ως προς κάθε γραμμή κρατώντας την άλλη γραμμή σταθερή.
- Ο4 Η ορίζουσα μητρώου είναι ίση με την ορίζουσα του ανάστροφου μητρώου.
- Ο5 Εάν οι δύο γραμμές του A είναι ίσες, τότε $\det A = 0$.
- Ο6 Εάν οι δύο γραμμές του A είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε $\det A = 0$.
- Ο7 Εάν σε μια γραμμή του A προστεθεί το πολλαπλάσιο άλλης γραμμής, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

Η αντίστοιχη εκδοχή για στήλη ή στήλες καθεμιάς από τις ιδιότητες (Ο2) – (Ο3) και (Ο5) – (Ο7) ισχύει επίσης.

Απόδειξη

(Ο1) – (Ο4) είναι οι (ο1) – (ο4).

(Ο5) Εάν οι γραμμές i και j του A , $i \neq j$, είναι ίσες, τότε εναλλάσσοντάς τες το μητρώο παραμένει το ίδιο αλλά από την (Ο2) η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο, έτσι θα έχουμε

$$\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0.$$

(Ο6) Εάν η γραμμή j του A είναι πολλαπλάσιο της γραμμής i , $i \neq j$, έστω $r_j = \lambda r_i$, και A' είναι το μητρώο A στο οποίο η j γραμμή έχει αντικατασταθεί από την i , τότε το A' έχει δύο γραμμές ίσες, άρα $\det A' = 0$. Επίσης από την (Ο3), παίρνουμε

$$\det A = \lambda \det A' = 0.$$

(Ο7) Έστω A'' να είναι το μητρώο A στο οποίο η j γραμμή έχει αντικατασταθεί από την $r_j + \lambda r_i$ και έστω A' να είναι όπως στο (Ο6), τότε και πάλι από τη γραμμικότητα της ορίζουσας βρίσκουμε

$$\det A'' = \det A + \lambda \det A' = \det A,$$

αφού $\det A' = 0$, που είναι ό,τι θέλουμε να αποδείξουμε.

Συνέπεια της (Ο4) είναι ότι οτιδήποτε ισχύει για γραμμές ισχύει και για στήλες, ειδικά η για στήλη εκδοχή της (Ο3) είναι οι (1) και (2). ■

Παράδειγμα 1

Αν k, λ, μ είναι πραγματικές σταθερές και

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = k$$

να βρεθούν, δίχως να εκτελεστούν πράξεις, οι τιμές των ορίζουσών

α' $\begin{vmatrix} \lambda c & \lambda d \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix}$

β' $\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a + \mu c & \lambda b + \mu d \end{vmatrix}$

γ' $\begin{vmatrix} a - \lambda c & b - \lambda d \\ \lambda a + c & \lambda b + d \end{vmatrix}$

α' Από τις ιδιότητες της ορίζουσας υπολογίζουμε

$$\begin{vmatrix} \lambda c & \lambda d \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} c & d \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} \quad (\text{από την (O3)})$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \quad (\text{από την (O3)})$$

$$= \lambda^2 (-1) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (\text{από την (O2)})$$

$$= -\lambda^2 k.$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

β'

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a + \mu c & \lambda b + \mu d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ \mu c & \mu d \end{vmatrix} && (\text{από την (Ο2)}) \\ &= \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} && (\text{από την (Ο2)}) \\ &= \lambda 0 + \mu k && (\text{από την (Ο6)}) \\ &= \mu k.\end{aligned}$$

γ

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a - \lambda c & b - \lambda d \\ \lambda a + c & \lambda b + d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a + c & \lambda b + d \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} c & d \\ \lambda a + c & \lambda b + d \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \lambda^2 \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= (1 + \lambda^2)k.\end{aligned}$$

2. Η $n \times n$ ορίζουσα

Ορισμός 2

Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένα $n \times n$ μητρώο, με A_{ij} συμβολίζουμε το $(n-1) \times (n-1)$ μητρώο το οποίο προκύπτει από το A διαγράφοντας την i γραμμή και την j στήλη.

Παράδειγμα 2

Αν

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, & A_{13} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ A_{23} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, & A_{31} &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, & A_{32} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Την ορίζουσα ενός $n \times n$ μητρώου A συμβολίζουμε και με $|A|$, όπως ακριβώς και στην περίπτωση 2×2 , έτσι αν

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{τότε} \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ορισμός 3

Αν $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\det : M^{n,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ ως

❶ $n = 1$ και $A = (a_{11})$, τότε

$$\det A = a_{11}.$$

❷ $n > 1$ και $A = (a_{ij})$, τότε

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}. \quad (6)$$

Από τον ορισμό λοιπόν έπεται ότι

- ❶ Αν $n = 2$, οπότε $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, από το (1) υπολογίζουμε

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det(a_{22}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(a_{21}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

δηλαδή στην περίπτωση $n = 2$ η συνάρτηση $\det$ συμφωνεί με την ορίζουσα τάξης δύο.

- ❷ Αν $n = 3$, οπότε $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det A_{13} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

και το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει από την περίπτωση $n = 2$. Κατά συνέπεια η έκφραση στην (6) γενικεύει την ορίζουσα τάξης δύο και μοιάζει να είναι ένας λογικός ορισμός για την ορίζουσα κάθε τάξης. Θέλουμε η ορίζουσα να ικανοποιεί τις ιδιότητες που ικανοποιεί η ορίζουσα τάξης δύο.

Θεώρημα 2

Η συνάρτηση $\det : \mathbb{M}^{n,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ στον Ορισμό 3 ικανοποιεί τις ιδιότητες

1. Αν I είναι το ταυτοτικό μητρώο, τότε $\det I = 1$.
2. Η συνάρτηση $\det$ είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή ξεχωριστά.
3. Αν το μητρώο A' προκύπτει από το A με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε $\det A' = -\det A$.

Επιπλέον η $\det$ είναι η **μοναδική** συνάρτηση $\mathbb{M}^{n,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ η οποία χαρακτηρίζεται από τις παραπάνω ιδιότητες.

Άσκηση 1

Δείξτε ότι η ιδιότητα (3) στο Θεώρημα 2, δεδομένης της (2), είναι, για την ακρίβεια ισοδύναμη με κάθε μια από τις (3a), (3b), (3c)

- (3a) Αν το μητρώο A έχει δύο ίσες γραμμές, τότε $\det A = 0$.
- (3b) Αν $\text{rank } A < n$, τότε $\det A = 0$.
- (3c) Αν το μητρώο A' προκύπτει από το A προσθέτοντας το πολλαπλάσιο μιας γραμμής σε άλλη γραμμή, τότε $\det A = \det A'$.

Στην ιδιότητα (2) εννοούμε ότι αν με r_j συμβολίσουμε την j -γραμμή του μητρώου A , ως διάνυσμα γραμμή, ώστε $A = (r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n)^T$, τότε

$$\det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \lambda r + \mu r' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Μια άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι ότι **αν μια γραμμή ενός μητρώου περιέχει μόνο το μηδέν, τότε η ορίζουσα του μητρώου είναι ίση με μηδέν**. Πράγματι αν συμβολίσουμε με 0 τη μηδενική γραμμή, τότε

$$\det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r - r \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = 0.$$

Θεώρημα 3 (το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς γραμμή)

Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένα $n \times n$ μητρώο με $n \geq 2$, τότε για $1 \leq i \leq n$ η ορίζουσα του A δίνεται από τη σχέση

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}. \quad (7)$$

Θεώρημα 4 (το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς στήλη)

Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένα $n \times n$ μητρώο με $n \geq 2$, τότε για $1 \leq j \leq n$ η ορίζουσα του A δίνεται από τη σχέση

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}. \quad (8)$$

Ορισμός 4

Για το μητρώο $A = (a_{ij})$, τον όρο $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ στο ανάπτυγμα της ορίζουσας λέμε **συμπαράγοντα** (cofactor) του στοιχείου a_{ij} . Την έκφραση (7) λέμε ανάπτυγμα σε συμπαράγοντες ως προς την i -γραμμή του A και εκείνη στην (8) λέμε ανάπτυγμα ως προς την j -στήλη του A .

Παράδειγμα 3

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Επιλέγοντας λογικά την δεύτερη στήλη υπολογίζουμε

$$\det A = (-1)^{1+2}(-1)|A_{12}| + (-1)^{2+2}0|A_{22}| + (-1)^{3+2}0|A_{32}| + (-1)^{4+2}0|A_{42}|$$

$$= \det A_{12} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}(2) \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}(-2) \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 6 - 2(6) - 2(-6) = 6.$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} (2) \det A_{11} \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = (2)(3) \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (2)(3)(4)(5). \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια η ορίζουσα του άνω τριγωνικού μητρώου είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της (κύριας) διαγωνίου.

Πρόταση 1

Η ορίζουσα ενός άνω, ή κάτω τριγωνικού, ή διαγωνίου μητρώου είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.

3. Ιδιότητες της ορίζουσας

Θεώρημα 5

Εάν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο, τότε $\det A = \det A^T$.

Θεώρημα 6

Εάν A και B είναι $n \times n$ μητρώα, τότε $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Πόρισμα 1

Εάν A είναι ένα $n \times n$ αντιστρέψιμο μητρώο τότε $\det A \neq 0$, επιπλέον

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Παράδειγμα 5

Υπολογίζουμε την 2×2 ορίζουσα με χρήση των ιδιοτήτων που την χαρακτηρίζουν μοναδικά (Θεώρημα 2) και τις ιδιότητες που απορρέουν από αυτές.

Αν

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

τότε

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \det(a\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 \quad b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) \\ &= a\det(\mathbf{e}_1 \quad b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) + c\det(\mathbf{e}_2 \quad b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) \\ &= ab\det(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_1) + ad\det(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2) + cb\det(\mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_1) + cd\det(\mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_2) \\ &= ad\det(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2) - bc\det(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2) \\ &= ad\det I - bc\det I \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

Έστω $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ένα τετραγωνικό σύστημα, αν το μητρώο A είναι αντιστρέψιμο, τότε η μοναδική λύση του συστήματος δίνεται από $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Θεώρημα 7 (Ο κανόνας του Cramer)

Έστω A ένα $n \times n$ αντιστρέψιμο μητρώο και έστω $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ η λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Για $k = 1, 2, \dots, n$ συμβολίζουμε με A_k το μητρώο που προκύπτει από το A αν αντικαταστήσουμε την k -στήλη του με το διάνυσμα $\mathbf{b}$, τότε οι λύσεις του συστήματος δίνονται από τη σχέση

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Απόδειξη

Αν $A = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_n)$, συμβολίζουμε με X_k το μητρώο που προκύπτει από το ταυτοτικό μητρώο I αν αντικαταστήσουμε την k -στήλη του με $\mathbf{x}$, δηλαδή

$$X_k = (\mathbf{e}_1 \ \dots \ \mathbf{e}_{k-1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{e}_{k+1} \ \dots \ \mathbf{e}_n) \quad (10)$$

όπου $\mathbf{e}_k$, $k = 1, \dots, n$ είναι οι στήλες του I , τότε

$$AX_k = (A\mathbf{e}_1 \ \dots \ A\mathbf{e}_{k-1} \ A\mathbf{x} \ A\mathbf{e}_{k+1} \ \dots \ A\mathbf{e}_n)$$

ή

$$AX_k = (\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_{k-1} \mathbf{b} \mathbf{c}_{k+1} \cdots \mathbf{c}_n) = A_k.$$

Έτσι υπολογίζουμε

$$\det A_k = \det(AX_k) = (\det A)(\det X_k) \quad (11)$$

Από την (10) το τυπικό μητρώο X_k γράφεται ως

$$X_k = (\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_{k-1} \underbrace{x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_k \mathbf{e}_k + \cdots + x_n \mathbf{e}_n}_{k\text{-στήλη}} \mathbf{e}_{k+1} \cdots \mathbf{e}_n) \quad (12)$$

οπότε από τη γραμμικότητα της ορίζουσας και τη γραμμική εξάρτηση των στηλών του X_k υπολογίζουμε

$$\det X_k = x_k \det I = x_k. \quad (13)$$

Από τις (11), (13) έπεται η ζητούμενη σχέση. ■

4. Ένας τύπος για το αντίστροφο μητρώο

Στην περίπτωση ενός 2×2 αντιστρέψιμου μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Αν με $(A^{-1})_{ij}$ συμβολίζουμε το στοιχείο στην i -γραμμή και j -στήλη του A^{-1} , και με $\psi_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ τον συμπαραγόντα του a_{ij} , τότε

$$(A^{-1})_{11} = \frac{a_{22}}{\det A} = (-1)^{1+1} \frac{\det A_{11}}{\det A} = \frac{\psi_{11}}{\det A},$$

$$(A^{-1})_{12} = \frac{-a_{12}}{\det A} = (-1)^{1+2} \frac{\det A_{21}}{\det A} = \frac{\psi_{21}}{\det A},$$

$$(A^{-1})_{21} = \frac{-a_{21}}{\det A} = (-1)^{2+1} \frac{\det A_{12}}{\det A} = \frac{\psi_{12}}{\det A},$$

$$(A^{-1})_{22} = \frac{a_{11}}{\det A} = (-1)^{2+2} \frac{\det A_{22}}{\det A} = \frac{\psi_{22}}{\det A}.$$

Έτσι αν Ψ είναι το μητρώο των συμπαραγόντων, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \Psi^T.$$

Αποδεικνύεται ότι ο τύπος αυτός ισχύει και στη γενική $n \times n$ περίπτωση.

Θεώρημα 8

Εάν A είναι ένα $n \times n$ αντιστρέψιμο μητρώο και Ψ είναι το μητρώο των συμπαραγόντων, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \Psi^T. \quad (14)$$

5. Ο τύπος του Leibniz

Ένας διαφορετικός τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας επιτυγχάνεται με εργαλεία της Συνδυαστικής Ανάλυσης. Αναπτύσσοντας μια ορίζουσα, για παράδειγμα, τάξης 3 βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= \sum_{k=1}^{3!} (-1)^{n_k} a_{1\sigma_k(1)} a_{2\sigma_k(2)} a_{3\sigma_k(3)}, \end{aligned}$$

αφού κάθε όρος του αθροίσματος είναι της μορφής $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$ με $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ όπου $i \neq j, i \neq k$, και $j \neq k$ σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς, όπου $n_k \in \{1, 2\}$ και σ_k είναι μετάθεση του $\{1, 2, 3\}$, $k = 1, 2, \dots, 6$. Μια μετάθεση του $\{1, \dots, n\}$ είναι μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Οι μεταθέσεις αυτές αποτελούν τη συμμετρική ομάδα S_n με $n!$ στοιχεία. Λέμε ότι οι τιμές της ταυτοτικής μετάθεσης έχουν τη φυσική διάταξη. Λέμε ότι μια μετάθεση είναι **άρτια/περιπτή** αν οι τιμές της επανέρχονται στη φυσική διάταξη με άρτιο/περιπτό πλήθος εναλλαγών. Για παράδειγμα η 312 είναι άρτια μετάθεση ενώ η 132 είναι περιπτή μετάθεση. Ορίζουμε το **πρόσημο** μιας μετάθεσης σ , $\pi(\sigma)$, με τη σχέση

$$\pi(\sigma) = +1, \quad \text{αν η } \sigma \text{ είναι άρτια} \quad \& \quad \pi(\sigma) = -1, \quad \text{αν η } \sigma \text{ είναι περιπτή}$$

Θεώρημα 9

Εάν A είναι ένα $n \times n$ μητρώο και S_n είναι η ομάδα των μεταθέσεων του $\{1, \dots, n\}$, τότε η ορίζουσα του A είναι

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \pi(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

όπου $\pi(\sigma)$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης σ .

6. Το εξωτερικό γινόμενο

Αν $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ είναι η κανονική βάση στον $\mathbb{R}^3$ μπορούμε να γράψουμε, όπως συνηθίζεται στον Απειροστικό Λογισμό, ή στη Φυσική,

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_3.$$

Ορισμός 5

Αν

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, ορίζουμε το **εξωτερικό γινόμενο** των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, και το συμβολίζουμε με $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, το διάνυσμα

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \quad (15)$$

Από το ανάπτυγμα της ορίζουσας βλέπουμε αμέσως ότι μπορούμε να παραστήσουμε το εξωτερικό γινόμενο ως ορίζουσα στην ευκολομνημόνευτη μορφή

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Το εξωτερικό γινόμενο το λέμε και **σταυρωτό γινόμενο** (cross product), ή **διανυσματικό γινόμενο** (vector product).

Παρατήρηση 4

Από την (15) και τις ιδιότητες της ορίζουσας έπεται αμέσως ότι

- ❶ Αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- ❷ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
- ❸ $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Επίσης άμεση συνέπεια του ορισμού των διανυσμάτων $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ και του εξωτερικού γινομένου είναι το αποτέλεσμα

Πρόταση 2

Εάν, όπως ορίσαμε,

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

τότε

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Πρόταση 3

Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u} \quad \text{και} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v},$$

δηλαδή το $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{u}$ και στο $\mathbf{v}$, κατά συνέπεια είναι ορθογώνιο στο επίπεδο που παράγεται από τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ οποτεδήποτε τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη.

Δείχνουμε ότι $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$. Πράγματι από την (15) και τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

από τον ορισμό της ορίζουσας, συνεπώς $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$ αφού η ορίζουσα έχει δυο γραμμές ίσες. Η απόδειξη ότι $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$ είναι ανάλογη, ενώ από τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου έπεται ότι

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} + \mu (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. □

Εάν $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ παρατηρούμε ότι

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ορισμός 6

Εάν $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ το $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ λέμε **τριπλό γινόμενο** (triple product) των $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$, έτσι

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Από τον ορισμό του τριπλού γινομένου απορρέει αμέσως ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, ισοδύναμα είναι συνεπίεδα, περιέχονται δηλαδή στο ίδιο επίπεδο, αν και μόνο αν

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Άσκηση 2

Το εξωτερικό γινόμενο προσδίδει στον $\mathbb{R}^3$ επιπλέον δομή.

- α) Εάν $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, και $\mathbf{c}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ δείξτε ότι

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad \text{και} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

ισχύει δηλαδή ο επιμεριστικός νόμος.

- β) Δείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το εξωτερικό γινόμενο, $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \times)$, είναι μια μη προσεταιριστική άλγεβρα, δηλαδή δεν ισχύει πάντα η ισότητα

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

- γ) Δείξτε ότι ικανοποιείται η ταυτότητα του Jacobi

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

για όλα τα διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, και $\mathbf{c}$.

7. Όγκος και ορίζουσα

Αν τρία διανύσματα δεν είναι συνεπίεδα ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο στο $\mathbb{R}^3$. Το βαθμωτό μέγεθος $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ σχετίζεται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου. Ας δούμε κάποιες απλές περιπτώσεις.

- Αν $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{w} = \mathbf{e}_3$, τότε

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = |I| = 1$$

όπου I είναι το ταυτοτικό μητρώο, και το $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ δίνει ακριβώς τον όγκο του μοναδιαίου κύβου.

- Αν λ, μ, ν είναι θετικές σταθερές και $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v} = \mu \mathbf{e}_2$, $\mathbf{w} = \nu \mathbf{e}_3$, τότε

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{vmatrix} = \lambda \mu \nu$$

που και πάλι είναι ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα τρία διανύσματα.

Πρόταση 4

Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2, \quad (16)$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο.

Απόδειξη.

Από την (15) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2

Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta,$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Απόδειξη.

Από την (16) και τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

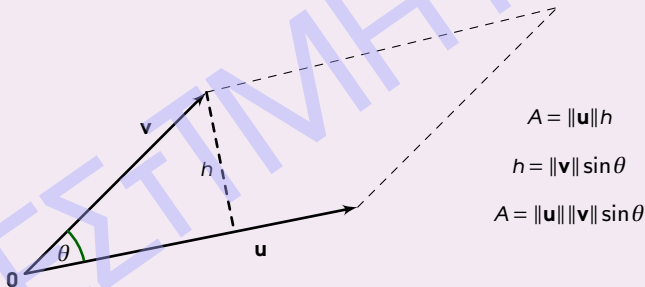
απ' όπου έπεται το ζητούμενο παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες αφού $\sin \theta \geq 0$.



Παρατήρηση 5 (Εμβαδόν και εξωτερικό γινόμενο)

Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ και με $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ συμβολίσουμε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, τότε, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|. \quad (17)$$



Σχήμα: Εμβαδόν ορθογωνίου

Ορισμός 7

Θα λέμε ότι η τριάδα **$\mathbf{u-v-w}$** διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί ένα **θετικά προσανατολισμένο σύστημα** αν

$$\det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}) > 0.$$

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα **$\mathbf{u-v-w}$** έχει τον προσανατολισμό του τρισσορθογωνίου συστήματος **$\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$** .

Παρατήρηση 6

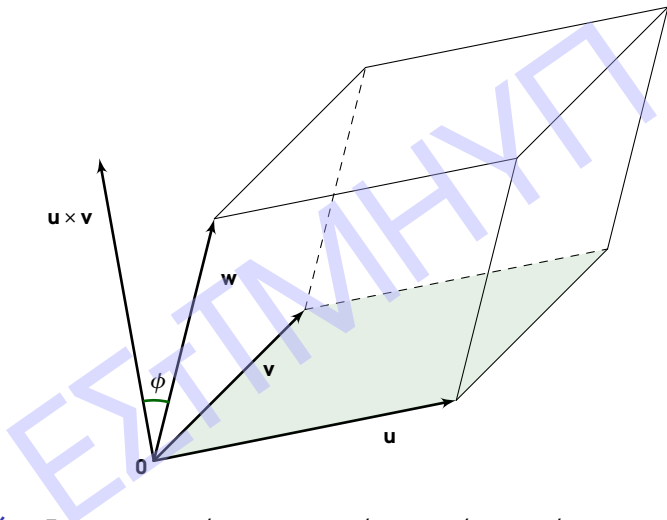
Αν τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε το σύστημα $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ είναι θετικά προσανατολισμένο.

Πράγματι γράφοντας $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (p_1 \ p_2 \ p_3)^T$ έχουμε

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & p_1 \\ u_2 & v_2 & p_2 \\ u_3 & v_3 & p_3 \end{vmatrix} \\ &= p_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - p_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + p_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2\end{aligned}$$

από την (15).

Έστω ότι το σύστημα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι θετικά προσανατολισμένο. Αν ϕ είναι η γωνία μεταξύ των $\mathbf{w}$ και $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, βλέπε Σχήμα, τότε $0 \leq \phi < \pi/2$ (γιατί;).



Σχήμα: Το παραλληλεπίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, και $\mathbf{w}$

Αν $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ είναι ο όγκος του θετικά προσανατολισμένου στερεού, τότε

$$\begin{aligned} V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \|\mathbf{w}\| \cos \phi \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \phi \\ &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \\ &= \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Επειδή $\det(\mathbf{v} \ \mathbf{u} \ \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w})$, αν το σύστημα $\mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{w}$ δεν είναι θετικά προσανατολισμένο, τότε το $\mathbf{v}-\mathbf{u}-\mathbf{w}$ είναι θετικά προσανατολισμένο και $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$. Δείξαμε λοιπόν το

Θεώρημα 10

Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε ο όγκος $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ του στερεού που παράγεται από τα τρία αυτά διανύσματα είναι

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w})|$$

ειδικά αν το σύστημα $\mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{w}$ είναι θετικά προσανατολισμένο, τότε $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w})$.