ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 6

Διανυσματικοί υπόχωροι
Βάση & Διάσταση Διανυσματικού χώρου

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

5 Νοεμβρίου 2024

Ορισμός 1

Αν $\mathscr{V}$ ένα μη κενό σύνολο και $\mathscr{F}$ είναι ένα σώμα, (στη πράξη $\mathscr{F}=\mathbb{R}$, ή $\mathscr{F}=\mathbb{C}$) και αν ``+'' και ``·'' είναι δύο πράξεις, για τις οποίες ικανοποιούνται οι νόμοι

- **V1** $x+y\in\mathscr{V}$, για κάθε $x,y\in\mathscr{V}$
- **V2** $x+y=y+x$, για κάθε $x,y\in\mathscr{V}$
- **V3** $x+(y+z)=(x+y)+z$, για κάθε $x,y,z\in\mathscr{V}$
- **V4** υπάρχει $0\in\mathscr{V}$ τέτοιο ώστε $0+x=x$ για κάθε $x\in\mathscr{V}$
- **V5** για κάθε $x\in\mathscr{V}$ υπάρχει $-x\in\mathscr{V}$ έτσι ώστε $-x+x=0$
- **V6** $\lambda\cdot x\in\mathscr{V}$, για κάθε $x\in\mathscr{V}$ και $\lambda\in\mathscr{F}$
- **V7** $\lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\mu)\cdot x$, για κάθε $x\in\mathscr{V}$ και $\lambda,\mu\in\mathscr{F}$
- **V8** $1\cdot x=x$, για κάθε $x\in\mathscr{V}$
- **V9** $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$, για κάθε $x,y\in\mathscr{V}$ και $\lambda\in\mathscr{F}$
- **V10** $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$, για κάθε $x\in\mathscr{V}$ και $\lambda,\mu\in\mathscr{F}$.

θα λέμε ότι η τριάδα $(\mathscr{V},+,\cdot)$ είναι ένας **διανυσματικός χώρος** (vector space) πάνω στο σώμα $\mathscr{F}$. Στη γενική περίπτωση γράφουμε $\mathscr{V}(\mathscr{F})$. Το χώρο $\mathscr{V}(\mathbb{R})$ τον λέμε **πραγματικό διανυσματικό χώρο**, ενώ τον $\mathscr{V}(\mathbb{C})$ τον λέμε **μιγαδικό διανυσματικό χώρο** . Τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου θα τα λέμε **διανύσματα** (vectors).

Παρατήρηση 1

Αν p είναι ένα πολυώνυμο στον χώρο $\mathbb{P}_n$ και $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n$, τότε η απεικόνιση $L : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ που ορίζεται με τη σχέση

$$L(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

είναι ένα-προς-ένα και επί και επιπλέον για $p, q \in \mathbb{P}_n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$L(p+q) = L(p) + L(q), \qquad \text{και} \qquad L(\lambda p) = \lambda L(p). \tag{1}$$

Μια τέτοια ένα-προς-ένα απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων λέγεται **ισομορφισμός** και η ύπαρξη ενός ισομορφισμού μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων δηλώνει ότι οι δύο χώροι, πρακτικά, ταυτίζονται. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεχόμαστε ότι η k-συνιστώσα ενός διανύσματος στο $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι ο συντελεστής του x^{k-1}, $k = 1, 2, \ldots n+1$.

Παρατήρηση 1 (συνέχεια)

Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε την αντιστοιχία

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2 - 3x + x^2 \in \mathbb{P}_2.$$

Επίσης το άθροισμα διανυσμάτων ή το γινόμενο διανύσματος με σταθερά αντιστοιχεί και δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με το άθροισμα των αντιστοίχων πολυωνύμων ή το γινόμενο του αντίστοιχου πολυωνύμου με την σταθερά.

Ορισμός 2

Αν $(X, +, \cdot)$ και $(Y, +, \cdot)$ είναι διανυσματικοί χώροι μια απεικόνιση $F : X \to Y$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$F(x+y) = F(x) + F(y), \qquad \text{και} \qquad F(\lambda x) = \lambda F(x), \tag{2}$$

για κάθε x και y στο X και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, θα λέγεται **γραμμική απεικόνιση** (linear map) ή **γραμμικός μετασχηματισμός** (linear transformation).

1. Διανυσματικοί υπόχωροι

Παράδειγμα 1

Αν

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των **u** και **v** αποτελούν διανυσματικό χώρο.

Αν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix},$$

έτσι αν ονομάσουμε W το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών τότε

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad z = x + y \right\}.$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Αν **w** και **z** είναι διανύσματα στο W, τότε

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} p \\ p+q \\ q \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} r \\ r+s \\ s \end{pmatrix}$$

οπότε για $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathbf{w}+\mathbf{z} = \begin{pmatrix} p+r \\ (p+q)+(r+s) \\ q+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+r \\ (p+r)+(q+s) \\ q+s \end{pmatrix}, \quad \lambda\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda(p+q) \\ \lambda q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda p+\lambda q \\ \lambda q \end{pmatrix}$$

κατά συνέπεια $\mathbf{w}+\mathbf{z} \in W$ και $\lambda\mathbf{w} \in W$. Το μηδενικό διάνυσμα περιέχεται στο W αφού $\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v}$. Επίσης αν $\mathbf{w} \in W$, τότε για κάποια $a, b \in R$ είναι $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, οπότε $-\mathbf{w} = (-a)\mathbf{u} + (-b)\mathbf{v} \in W$. Οι υπόλοιποι νόμοι (V1), (V2) και (V5)-(V8) αυτόματα ικανοποιούνται αφού αφορούν σε ιδιότητες των πράξεων μεταξύ στοιχείων του $\mathbb{R}^3$, ή του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{R}^3$ και $W \subset \mathbb{R}^3$. Έτσι η δομή $(W, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Από το Παράδειγμα 1 εξάγονται μερικά σημαντικά συμπεράσματα:

- Σ1 Ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου μπορεί να είναι διανυσματικός χώρος με πράξεις τον περιορισμό των πράξεων του αρχικού χώρου στο υποσύνολο.
- Σ2 Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών κάποιας συλλογής διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου με πράξεις τον περιορισμό των πράξεων του αρχικού χώρου έχει τη δομή διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 3

Εάν ο X είναι διανυσματικός χώρος και $W \subseteq X$, θα λέμε ότι ο W είναι **διανυσματικός υπόχωρος** (vector subspace) ή απλά **υπόχωρος** του X εάν ο περιορισμός των πράξεων του X στο W προσδίδει στο W τη δομή διανυσματικού χώρου.

Θεώρημα 1

Εάν ο X είναι διανυσματικός χώρος και $W \subseteq X$, ο W είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν για κάθε $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ στο W και για κάθε λ και μ στο $\mathbb{R}$ το $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$ είναι στοιχείο του W.

Ορισμός 4

Εάν ο X είναι διανυσματικός χώρος και $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του X, το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{u}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ συμβολίζουμε με $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, έτσι

$$\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n,\ c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

και ονομάζουμε **διάνοιγμα** (span) των $\mathbf{u}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Αν $S \subseteq X$ με $\operatorname{span}(S)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του S.

Θεώρημα 2

Έστω ότι $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του διανυσματικού χώρου X, τότε

1. *Το $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ είναι υπόχωρος του X.*
2. *Εάν W είναι υπόχωρος του X και $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subseteq W$, τότε το διάνοιγμα $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ είναι υπόχωρος του W, δηλαδή ο $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος ο οποίος περιέχει τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$.*

Παράδειγμα 2 (Η ευθεία ως διανυσματικός υπόχωρος)

Εάν $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$, τότε το $\operatorname{span}\{\mathbf{u}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και αποτελείται απ΄ όλα τα διανύσματα της μορφής $\lambda\mathbf{u}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια είναι η ευθεία που περιέχει το $\mathbf{u}$, ας την πούμε $L_{\mathbf{u}}$. Η $L_{\mathbf{u}}$ μπορεί να παρασταθεί με την **διανυσματική** εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ειδικά στο $\mathbb{R}^2$ αν $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ το διάνυσμα $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ανήκει στον $L_{\mathbf{u}}$ αν και μόνον αν

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_0 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = pt_0 \\ y = qt_0 \end{cases}$$

για κάποιο $t_0 \in \mathbb{R}$, απ΄ όπου έπεται ότι $qx = py$, ή $qx - py = 0$. **Συμπέρασμα:** οι ευθείες που είναι υπόχωροι στο $\mathbb{R}^2$ έχουν **αλγεβρική** εξίσωση $ax + by = 0$. Σημειώνουμε ότι μια ευθεία με εξίσωση $ax + by + c = 0$, με $c \neq 0$, δεν μπορεί να είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ γιατί δεν περιέχει το διάνυσμα $\mathbf{0}$.

2. Γραμμική εξάρτηση – γραμμική ανεξαρτησία

Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{a} = \beta\mathbf{b}$, για κάποια σταθερά β θα λέμε ότι τα δύο διανύσματα είναι **γραμμικά εξαρτημένα**. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε

$$(-1)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι τα $\mathbf{a}$, και $\mathbf{b}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ και υπάρχουν σταθερές α και β, όχι και οι δύο μηδέν ώστε

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Έστω ότι $\alpha \neq 0$, τότε θα είναι $\mathbf{a} = -(\beta/\alpha)\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b}$, δηλαδή το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου, δηλαδή τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Κατά συνέπεια οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

1. Τα διανύσματα $\mathbf{a}$, και $\mathbf{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
2. Για κάποια σταθερά λ ισχύει $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$.
3. Υπάρχουν σταθερές α και β όχι και οι δύο ίσες με μηδέν ώστε $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Ορισμός 5

Για τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ του διανυσματικού χώρου $X(\mathscr{F})$, θα λέμε ότι

1. Είναι **γραμμικά εξαρτημένα** (linearly dependent) εάν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ όχι όλες ίσες με μηδέν ώστε

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

2. Είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** (linearly independent) εάν οποτεδήποτε για σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ισχύει

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

τότε αναγκαστικά $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Ισοδύναμα: Θεωρούμε την εξίσωση

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Θα λέμε ότι τα διανύσματα είναι:
γραμμικά ανεξάρτητα αν η εξίσωση έχει μόνο τη μηδενική λύση.
γραμμικά εξαρτημένα αν η εξίσωση έχει μη μηδενική λύση.

Παρατηρήσεις

Ας θεωρήσουμε τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ του διανυσματικού χώρου $X(\mathscr{F})$.

1. Εάν τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε κάποιο ή κάποια από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Πράγματι υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ μία τουλάχιστον από τις οποίες είναι διάφορη του μηδενός ώστε
$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$
Έστω, για παράδειγμα, ότι $c_2 \neq 0$, τότε
$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2 &= -\frac{c_1}{c_2}\mathbf{u}_1 - \frac{c_3}{c_2}\mathbf{u}_3 - \cdots - \frac{c_n}{c_2}\mathbf{u}_n \\ &= c_1'\mathbf{u}_1 + c_3'\mathbf{u}_3 + \cdots + c_n'\mathbf{u}_n.\end{aligned}$$

2. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν κάποιο από τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι αν, για παράδειγμα, υποθέσουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{u}_2$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε
$$\mathbf{u}_2 = c_1\mathbf{u}_1 + c_3\mathbf{u}_3 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n \Rightarrow c_1\mathbf{u}_1 + (-1)\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$
δηλαδή τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

3. Εάν κάποιο από τα διανύσματα είναι το μηδενικό, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι υποθέτοντας, για παράδειγμα, ότι $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, τότε για $c_1 = c_3 = \cdots = c_n = 0$ και $c_2 \neq 0$ έχουμε

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Παράδειγμα 3

Οι συναρτήσεις sin και cos είναι γραμμικά ανεξάρτητες στον χώρο $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$ ή $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Πράγματι αν ήταν γραμμικά εξαρτημένες τότε η μια θα ήταν πολλαπλάσιο της άλλης, ισοδύναμα για κάποια πραγματική σταθερά λ θα ήταν $\sin x = \lambda \cos x$, για κάθε x. Τότε όμως θα έπρεπε

$$\sin(\pi/2) = \lambda \cos(\pi/2) \Leftrightarrow 1 = \lambda 0 = 0$$

που είναι αδύνατο, άρα οι sin και cos είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 4

Δείξτε ότι τρία διανύσματα

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

στο $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Περίπτωση 1: Τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν σταθερές α, β με $\alpha \neq 0$, ή $\beta \neq 0$, ώστε $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$, επομένως για $\gamma = 0$ είναι

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

με $\alpha \neq 0$, ή $\beta \neq 0$, ισοδύναμα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Περίπτωση 2: Τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δείχνουμε ότι στη περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} := a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0. \tag{3}$$

Παράδειγμα 4 (συνέχεια)

Πράγματι Επειδή $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ θα πρέπει $b_1 \neq 0$, ή $b_2 \neq 0$ και $a_1 \neq 0$, ή $a_2 \neq 0$. Έστω $b_1 \neq 0$, τότε αφού $\mathbf{a} \neq \lambda \mathbf{b}$ για κάθε σταθερά λ, θα πρέπει

$$a_2 \neq \frac{a_1}{b_1} b_2 \qquad \text{αφού} \qquad a_1 = \frac{a_1}{b_1} b_1$$

κατά συνέπεια $a_2 b_1 \neq a_1 b_2$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι υπάρχουν σταθερές α και β ώστε $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$, ή ισοδύναμα ότι το σύστημα

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

έχει λύση. Από την (3) έπεται ότι το μητρώο των συντελεστών αντιστρέφεται επομένως

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

κατά συνέπεια

Παράδειγμα 4 (συνέχεια)

$$\alpha = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad \beta = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \tag{6}$$

Γι αυτά λοιπόν τα α και β έχουμε

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + (-1)\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

συνεπώς τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ορισμός 6

Μια εξίσωση

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

με $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ πραγματικές (ή μιγαδικές) σταθερές λέγεται **γραμμική εξίσωση** στο $\mathbb{R}^n$ (ή στο $\mathbb{C}^n$). Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων λέγεται **γραμμικό σύστημα**.

Παρατήρηση 2

Στο Παράδειγμα 4 δείξαμε ότι αν τα διανύσματα

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε ισχύει η (3), δηλαδή η ορίζουσα των συνιστωσών των διανυσμάτων είναι διαφορετική του μηδενός. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η ορίζουσα των συνιστωσών είναι διαφορετική του μηδενός, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι υποθέτοντας ότι ισχύει η (3) και θεωρώντας την εξίσωση

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0},$$

δηλαδή με $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, από την (6) βρίσκουμε $\alpha = \beta = 0$ που είναι ο ισχυρισμός μας.

♣ Ένα από τα αποτελέσματα που δείξαμε στο Παράδειγμα 4 μπορεί να διατυπωθεί σε ``οριζουσιακή'' διάλεκτο ώς εξής: Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Εάν η ορίζουσα των συντελεστών

$$\det(\mathbf{a}\,\mathbf{b}) := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{8}$$

είναι διάφορη του μηδενός, τότε το σύστημα (7) έχει μοναδική λύση η οποία δίνεται από τις σχέσεις

$$x = \frac{\det(\mathbf{c}\,\mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}\,\mathbf{b})} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\det(\mathbf{a}\,\mathbf{c})}{\det(\mathbf{a}\,\mathbf{b})} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

Το αποτέλεσμα γενικεύεται και σε περισσότερες διαστάσεις (σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους). Ο τύπος στην (9) λέγεται κανόνας του Cramer. Θα επανέλθουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 3

Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}$*, είναι διανύσματα στο* $\mathbb{R}^n$*, τότε είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ όχι όλες ίσες με μηδέν ώστε

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Αν

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} a_1^k & a_2^k & \ldots & a_n^k \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1,$$

η εξίσωση (13) είναι ισοδύναμη με ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους, τις σταθερές c_k, $k = 1, 2, \ldots, n+1$

$$\begin{aligned} a_1^1 c_1 + a_1^2 c_2 + \cdots + a_1^{n+1} c_{n+1} &= 0 \\ a_2^1 c_1 + a_2^2 c_2 + \cdots + a_2^{n+1} c_{n+1} &= 0 \\ &\vdots \\ a_n^1 c_1 + a_n^2 c_2 + \cdots + a_n^{n+1} c_{n+1} &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Κατά συνέπεια αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα (14) έχει μη μηδενική λύση.

Ένα τέτοιο σύστημα, του οποίου οι σταθερές στο δεξί μέλος είναι μηδέν, λέγεται **ομοιογενές** (homogeneous). Αποδεικνύουμε λοιπόν το ισοδύναμο

Θεώρημα 4

Κάθε ομοιογενές γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους έχει μη μηδενική λύση.

Παράδειγμα 5

Για το σύστημα

$$
\begin{aligned}
2x+3y-2z&=0\\
4x-6y+2z&=0
\end{aligned}
$$

η $x=1$, $y=2$, $z=4$ είναι λύση. Υπάρχουν άλλες λύσεις;

Πόρισμα 1

Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^m$, και $n > m$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

3. Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Κάθε διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

έτσι ώστε αν u_1, u_2, u_3 είναι οι συνιστώσες του $\mathbf{u}$, τότε

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3.$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι αν $c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, τότε $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (γιατί;) δηλαδή τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ορισμός 7

Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ ενός διανυσματικού χώρου $X(\mathscr{F})$ αποτελούν μια **βάση** (basis) του διανυσματικού χώρου αν

1. Τα διανύσματα παράγουν το χώρο, δηλαδή $\text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\} = X$, και
2. Τα διανύσματα $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 6

Τα διανύσματα

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Πράγματι γράφοντας

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι για $c = z$, $b = y - z$, $a = x - y$ για το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ έχουμε

$$\mathbf{u} = (x-y)\mathbf{b}_1 + (y-z)\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3,$$

δηλαδή $\operatorname{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \mathbb{R}^3$. Επιπλέον από την εξίσωση $a\mathbf{b}_1 + b\mathbf{b}_2 + c\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$

Παράδειγμα 6 (συνέχεια)

βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ \quad\;\; b+c=0 \\ \qquad\quad c=0 \end{cases}$$

απ' όπου με ``προς τα πίσω αντικατάσταση'' προκύπτει $a=b=c=0$, δηλαδή τα διανύσματα $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, κατά συνέπεια αποτελούν μια βάση για τον $\mathbb{R}^3$.

Παρατήρηση 3

Από το Παράδειγμα (Π3) και την παρατήρηση στην εισαγωγή της παραγράφου συμπεραίνουμε ότι η βάση ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα οι

$$\mathscr{B}_1 = \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}, \qquad \mathscr{B}_2 = \{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$$

είναι βάσεις του $\mathbb{R}^3$. Η ιδιαίτερη $\mathscr{B}_1$ λέγεται **κανονική** βάση. Γενικά η $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\}$ με ανάλογα $\mathbf{e}_k$ λέγεται κανονική βάση για τον $\mathbb{R}^n$.

Το γεγονός ότι οι βάσεις $\mathscr{B}_1$ και $\mathscr{B}_2$ του $\mathbb{R}^3$ περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων δεν είναι τυχαίο.

Θεώρημα 5

Εάν $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ και $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ είναι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου X, τότε $m = n$.

Ορισμός 8

Το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης $\mathscr{B}$ ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται **διάσταση** (dimension) του χώρου. Αν το $\mathscr{B}$ είναι πεπερασμένο σύνολο θα λέμε ότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση, διαφορετικά ο X θα λέγεται απειροδιάστατος χώρος. Αν η διάσταση του X είναι n, γράφουμε $\dim X = n$. Αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης γράφουμε $\dim X < \infty$.

Θεώρημα 6

Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, είναι διανύσματα του m-διάστατου χώρου X, δηλαδή $\dim X = m$, και $n > m$, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Θεώρημα 7

Εάν $\dim X < \infty$ *και ο* W *είναι υπόχωρος του* X*, τότε*

1. *Ο υπόχωρος* W *έχει πεπερασμένη διάσταση.*
2. $\dim W \leq \dim X$.
3. *Εάν* $\dim W = \dim X$*, τότε* $W = X$.

Θεώρημα 8 (Επέκταση βάσης υποχώρου)

Εάν $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ *είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων στο χώρο* X *πεπερασμένης διάστασης, και* $\operatorname{span} S \neq X$*, τότε υπάρχουν διανύσματα* $\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+2}, \ldots, \mathbf{w}_n$ *με* $n = \dim X$*, ώστε το σύνολο* $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+2}, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ *να είναι μια βάση για τον* X.

΄Ασκηση 1

Δείξτε ότι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ είναι μια βάση για τον $\mathbb{P}_n$. Συμπεράνατε ότι $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.

Παράδειγμα 7

Τα διανύσματα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 + c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Επομένως παράγουν έναν διδιάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$, τον

$$W = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y = x + z, \quad \text{με} \quad x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

για τον οποίο αποτελούν μια βάση.

Παράδειγμα 7 (συνέχεια)

Ισχυριζόμαστε ότι εμπλουτίζοντας τη βάση $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ του W με ένα διάνυσμα $\mathbf{a}_3$ του $\mathbb{R}^3$ ώστε τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, παίρνουμε μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Επιλέγοντας ένα διάνυσμα που δεν έχει τη δομή των στοιχείων του W, για παράδειγμα

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ είναι όντως γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;) και επιπλέον παράγουν τον χώρο $\mathbb{R}^3$, αφού το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ του $\mathbb{R}^3$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ όπως βλέπουμε στη σχέση

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y - x - z \\ 0 \end{pmatrix} = x\mathbf{a}_1 + z\mathbf{a}_2 + (y - x - z)\mathbf{a}_3.$$

Κατά συνέπεια το σύνολο $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ είναι μια βάση για το $\mathbb{R}^3$.