ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 5

Υπολογισμός του αντίστροφου μητρώου
Διανυσματικοί χώροι

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

29 Οκτωβρίου 2024

Στοιχειώδη μητρώα (συνέχεια)

Κάθε βήμα στην διαδικασία της απαλοιφής μπορεί να επιτευχθεί πολλαπλασιάζοντας το αρχικό μητρώο με ένα κατάλληλο μητρώο. Σε αντιστοιχία με τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάθε τέτοιο μητρώο ονομάζεται **στοιχειώδες μητρώο**.

Παράδειγμα 1

Τα παρακάτω μητρώα είναι στοιχειώδη.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ειδικά το μητρώο J_2 είναι ένα μητρώο μετάθεσης το οποίο προέρχεται από το I με μία μόνο εναλλαγή γραμμών, ενώ το μητρώο J_3 προκύπτει αν στη δεύτερη γραμμή του I προστεθεί το τριπλάσιο της πρώτης γραμμής.

Αν το στοιχειώδες μητρώο E προέρχεται από το I εκτελώντας μια στοιχειώδη πράξη γραμμών και E' είναι το στοιχειώδες μητρώο το οποίο προέρχεται από το I εκτελώντας την αντίστροφη στοιχειώδη πράξη γραμμών, τότε $E^{-1} = E'$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \to r_1 \\ r_2 \to 2r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = J_1$$

και

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \to r_1 \\ r_2 \to \frac{1}{2}r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = J_1'$$

για το οποίο ισχύει

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Όμοια

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \to r_1 + 2r_2 \\ r_2 \to r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J_5$$

και

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \to r_1 - 2r_2 \\ r_2 \to r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J_5'$$

και τα δύο μητρώα είναι το ένα αντίστροφο του άλλου αφού $J_5'J_5 = J_5J_5' = I$.

Αν με r_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ συμβολίσουμε τις γραμμές ενός μητρώου A, τότε η πράξη

$$r_k \to r'_k = r_k + \lambda r_j \to r''_k = r'_k - \lambda r_j = r_k + \lambda r_j - \lambda r_j = r_k$$

υλοποιείται μέσω δύο κατάλληλων μητρώων, το ένα αντίστροφο του άλλου. Για παράδειγμα η πράξη $r_3 \to r_3 + \lambda r_2$, για A ένα $4 \times m$ μητρώο, επιτυγχάνεται με τον πολλαπλασιασμό με το στοιχειώδες μητρώο $E(\lambda)$

$$E(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + \lambda r_2 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

και

$$E(-\lambda)E(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + \lambda r_2 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ (r_3 + \lambda r_2) - \lambda r_2 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = A.$$

Αν με r_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ συμβολίσουμε τις γραμμές ενός μητρώου A, τότε η πράξη

$$r_k \to r_k' = r_k + \lambda r_j \to r_k'' = r_k' - \lambda r_j = r_k + \lambda r_j - \lambda r_j = r_k$$

υλοποιείται μέσω δύο κατάλληλων μητρώων, το ένα αντίστροφο του άλλου. Για παράδειγμα η πράξη $r_3 \to r_3 + \lambda r_2$, για A ένα $4 \times m$ μητρώο, επιτυγχάνεται με τον πολλαπλασιασμό με το στοιχειώδες μητρώο $E(\lambda)$

$$E(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + \lambda r_2 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

και

$$E(-\lambda)E(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + \lambda r_2 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ (r_3 + \lambda r_2) - \lambda r_2 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = A.$$

Φαίνεται λοιπόν ότι $E(-\lambda)E(\lambda) = I$. Πράγματι αυτό συμβαίνει αφού

$$\begin{aligned} E(-\lambda)E(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda+\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I. \end{aligned}$$

Όμοια δείχνεται ότι

$$E(\lambda)E(-\lambda) = I,$$

κατά συνέπεια $E(\lambda)^{-1} = E(-\lambda)$.

Επίσης αν με M_{ij} συμβολίσουμε το μητρώο μετάθεσης που εναλλάσσει τις γραμμές i και j του I, τότε $M_{ij}^{-1} = M_{ji} = M_{ij}$, πράγματι για το J_2 έχουμε

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Διατυπώνουμε λοιπόν χωρίς αυστηρή απόδειξη, αλλά χωρίς φόβο και πάθος, το

Θεώρημα 1

Κάθε στοιχειώδες μητρώο E είναι αντιστρέψιμο και το E^{-1} είναι επίσης στοιχειώδες μητρώο.

Παράδειγμα 2

Δείχνουμε πώς καταλήγουμε στην κλιμακωτή μορφή, έστω R, για το μητρώο A του Παραδείγματος (4/Διάλεξη 4) κάνοντας χρήση των στοιχειωδών μητρώων που αντιστοιχούν στο κάθε βήμα της απαλοιφής Gauss.

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = A_1$$

$$E_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = A_2$$

$$E_3 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = A_3$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

$$E_4A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = A_4$$

$$E_5A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 39 \end{pmatrix} = A_5$$

$$E_6A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13/2 \end{pmatrix} = R.$$

Παρατήρηση 1 (Σημαντική)

Στο Παράδειγμα 2 δείξαμε ότι

$$E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = R$$

όπου με R συμβολίσαμε μια κλιμακωτή μορφή του αρχικού μητρώου, κατά συνέπεια

$$A = LR \tag{1}$$

όπου $L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}$.

Θα λέμε ότι δύο μητρώα $n \times m$ είναι **γραμμοϊσοδύναμα** (row equivelent) εάν το ένα προκύπτει από το άλλο με με την διαδοχική εφαρμογή ενός πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων γραμμών.

Επειδή για κάθε στοιχειώδες μητρώο L_k το L_k^{-1} είναι επίσης στοιχειώδες η σχέση (1) εκφράζει ακριβώς ότι κάθε μητρώο είναι γραμμοϊσοδύναμο με κάθε κλιμακωτή μορφή του, και κατ΄ επέκταση γραμμοϊσοδύναμο με την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του. Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε την κλιμακωτή μορφή μητρώου με R και την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή με R_0.

1. Άνω-κάτω τριγωνική παραγοντοποίηση (LU)

Για το **τετραγωνικό μητρώο** A_1 με την απαλοιφή Gauss βρίσκουμε

$$E_1A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 \\ 0 & -2 & 8 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} = A_2$$

$$E_2A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & -18 \end{pmatrix} = A_3$$

$$E_3A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -18 \end{pmatrix} = A_4$$

$$E_4A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = A_5$$

$$E_5A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η διαδικασία της απαλοιφής Gauss, **κατά την οποία δεν υπάρχει μετάθεση γραμμών** καταλήγει στο αποτέλεσμα

$$E_5E_4E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

όπου το U είναι ένα άνω τριγωνικό μητρώο (upper triangular), συνεπώς

$$A = (E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1})U$$

όπου

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Το γινόμενο στα αριστερά του U υπολογίζεται εύκολα αν αναλογιστούμε τον τρόπο δράσης ενός στοιχειώδους μητρώου στο μητρώο το οποίο πολλαπλασιάζει από αριστερά, έτσι βρίσκουμε

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 \\ 0 & -2 & 8 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ή} \qquad A = LU.$$

Το A εκφράζεται ως γινόμενο ένός κάτω τριγωνικού (lower triangular) και ενός άνω τριγωνικού μητρώου. Το αποτέλεσμα αυτό εκφράζεται ως **άνω-κάτω τριγωνική παραγοντοποίηση**, ή και **LU παραγοντοποίηση** (Lower-Upper decomposition or factorization).

Θεώρημα 2

Εάν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο του οποίου η κλιμακωτή μορφή προκύπτει δίχως εναλλαγή γραμμών, τότε το μητρώο παραγοντοποιείται ως $A = LU$, όπου το L είναι ένα κάτω τριγωνικό μητρώο και το U ένα άνω τριγωνικό μητρώο.

2. Το αντίστροφο μητρώο

Έστω A ένα τετραγωνικό μητρώο και ας θεωρήσουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Αν το A είναι αντιστρέψιμο, τότε πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με A^{-1} παίρνουμε

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}, \tag{2}$$

αφού $A^{-1}A = I$, κατά συνέπεια το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\mathbf{b}$. Ειδικά αν $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ και το A είναι αντιστρέψιμο, τότε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την μηδενική $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Θεώρημα 3

Αν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

1. *Το A είναι αντιστρέψιμο.*
2. *Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την μηδενική.*
3. *Το A είναι γραμμοϊσοδύναμο με το ταυτοτικό μητρώο I.*
4. *Αν R_0 είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A, τότε $R_0 = I$.*

Απόδειξη.

Αποδεικνύουμε τις συνεπαγωγές $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$ Αν το A είναι αντιστρέψιμο όπως στην (2) έπεται ότι η λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι η $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Επιλύοντας το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ με απαλοιφή Gauss-Jordan καταλήγουμε, από την υπόθεση στο $I\mathbf{x} = \mathbf{0}$, κατά συνέπεια το A είναι γραμμοϊσοδύναμο με το ταυτοτικό μητρώο I.

$(3) \Rightarrow (1)$ Αφού το A είναι γραμμοϊσοδύναμο με το I υπάρχουν στοιχειώδη μητρώα $E_1, \ldots, E_k$ ώστε $E_k \cdots E_1 A = I$, κατά συνέπεια

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} I = (E_k \cdots E_1)^{-1}.$$

Έτσι το A είναι ίσο με ένα αντιστρέψιμο μητρώο, επομένως είναι και το ίδιο αντιστρέψιμο.

Από τον ορισμό της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής έπεται ότι $(3) \Leftrightarrow (4)$, κατά συνέπεια τα (1), (2), (3), (4) είναι ισοδύναμα. □

Υπολογισμός του αντίστροφου μητρώου

Το Θεώρημα 3 μας δίνει ένα συστηματικό τρόπο ελέγχου κατά πόσον το αντίστροφο μητρώου υπάρχει και την ίδια στιγμή και τρόπο υπολογισμού του. Αν λοιπόν για το τετραγωνικό μητρώο A υπάρχει το αντίστροφο, έστω X τότε $AX = I$, επιπλέον υπάρχουν στοιχειώδη μητρώα $E_1, \ldots, E_k$ τα οποία διεκπεραιώνουν την απαλοιφή Gauss-Jordan ώστε $E_k \cdots E_1 A = R_0 = I$. Έτσι θα έχουμε

$$AX = I \Leftrightarrow E_k \cdots E_1 AX = E_k \cdots E_1 I \Leftrightarrow IX = X = L$$

όπου $L = E_k \cdots E_1$. Έτσι ξεκινώντας από το μητρώο $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$ με τη διαδικασία απαλοιφής παίρνουμε

$$E_k \cdots E_1 \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k \cdots E_1 A & E_k \cdots E_1 I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & E_k \cdots E_1 \end{pmatrix}$$

ή σχηματικά

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} I & L \end{pmatrix}$$

και το μητρώο $L = E_k \cdots E_1$ είναι το A^{-1}. Κατά συνέπεια αν για κάποιο τετραγωνικό μητρώο A ξεκινώντας από το μητρώο $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$ και εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών καταλήξουμε σ' ένα μητρώο $\begin{pmatrix} I & L \end{pmatrix}$, τότε το A αντιστρέφεται και $A^{-1} = L$.

Παράδειγμα 3

Σύμφωνα με την Άσκηση 3.7 που λύσαμε

$$\text{αν} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{τότε} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δείχνουμε το αποτέλεσμα με τη διαδικασία που περιγράψαμε. Πράγματι διαμορφώνοντας το μητρώο $\begin{pmatrix} A \, I \end{pmatrix}$ με τις κατάλληλες στοιχειώδεις πράξεις παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to -r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Στο αριστερό μπλοκ του τελευταίου μητρώου εμφανίζεται το μοναδιαίο I ενώ στο δεξί μπλοκ βλέπουμε το αναμενόμενο A^{-1}.

Παρατήρηση 2

Γενικεύοντας το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 3 για 2×2 μητρώα, έχουμε ότι για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

υπάρχει το αντίστροφο αν και μόνο αν η ορίζουσα του A είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή $\det A = ad - bc \neq 0$ και αν αυτό ισχύει, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Μπορεί να δειχθεί, με πράξεις, ότι για 2×2 μητρώα A και B ισχύει $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, έτσι αν $\det A \neq 0$, τότε

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det I$$

$$\Rightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Παράδειγμα 4

Για να βρούμε το αντίστροφο του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

η διαδικασία σχηματικά είναι $\begin{pmatrix} A \; I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I \; X \end{pmatrix}$. Έτσι έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί το αντίστροφο του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

εφόσον αυτό υπάρχει.

Ξεκινώντας από το μητρώο $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$ και εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών θέλουμε να καταλήξουμε σε ένα μητρώο $\begin{pmatrix} I & X \end{pmatrix}$. Έτσι έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία της απαλοιφής Gauss καταλήγει σε ένα μητρώο με μηδενική γραμμή στο αριστερό μπλοκ όπου αναμένεται το ταυτοτικό μητρώο. Κατά συνέπεια το μητρώο δεν αντιστρέφεται.

Παρατήρηση 3

Τι συμβαίνει και το μητρώο A του Παραδείγματος 5 δεν αντιστρέφεται; Αν με A_{*j}, $j = 1,2,3$, συμβολίσουμε τις στήλες του A, τότε $2A_{*1} + A_{*2} = A_{*3}$, συνεπώς μια στήλη του του A είναι γραμμικός συνδυασμός άλλων στηλών. Δοκιμάζοντας να λύσουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι αν $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, το τελευταίο μητρώο αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Έτσι το σύστημα, όπως αναμενόταν εξάλλου υπό το πρίσμα του Θεωρήματος (5.2), έχει μη μηδενικές λύσεις, άπειρες το πλήθος.

Θεώρημα 4

Έστω A ένα τετραγωνικό μητρώο. Εάν υπάρχει τετραγωνικό μητρώο B ώστε $BA = I$, ή $AB = I$, τότε $B = A^{-1}$.

Απόδειξη.

Έστω ότι υπάρχει τετραγωνικό B ώστε $BA = I$. Για να δείξουμε ότι το A είναι αντιστρέψιμο αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την μηδενική. Θεωρούμε λοιπόν το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και πολλαπλασιάζοντας με B παίρνουμε διαδοχικά

$$BA\mathbf{x} = B\mathbf{0} \Rightarrow I\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

κατά συνέπεια το A είναι αντιστρέψιμο. Και πάλι από την υπόθεση $BA = I$ παίρνουμε

$$BAA^{-1} = IA^{-1} \Rightarrow BI = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}.$$

Έστω τώρα ότι $AB = I$, τότε από το πρώτο μέρος της απόδειξης έπεται ότι η μοναδική λύση του συστήματος $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι η μηδενική, κατά συνέπεια το B είναι αντιστρέψιμο και $A = B^{-1}$. Το A όντας ίσο με το αντιστρέψιμο μητρώο B^{-1} είναι αντιστρέψιμο και $A^{-1} = \left(B^{-1}\right)^{-1} = B$. □

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Εφοδιάζοντας το $\mathbb{R}^n$ με την πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων και με τον πολλαπλασιασμό διανύσματος επί σταθερά ώστε το αποτέλεσμα της κάθε πράξης να είναι διάνυσμα, σχηματικά

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \text{και} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

διαμορφώσαμε την **δομή** $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ για την οποία, γράφοντας X αντί για $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζοντας τα διανύσματα με συνήθεις χαρκτήρες, ισχύουν οι νόμοι

- V1 $x + y = y + x$, για κάθε $x, y \in X$
- V2 $x + (y + z) = (x + y) + z$, για κάθε $x, y, z \in X$
- V3 υπάρχει $0 \in X$ τέτοιο ώστε $0 + x = x$ για κάθε $x \in X$
- V4 για κάθε $x \in X$ υπάρχει $-x \in X$ έτσι ώστε $-x + x = 0$
- V5 $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- V6 $1x = x$, για κάθε $x \in X$
- V7 $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$
- V8 $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ερώτηση: Υπάρχουν άλλα σύνολα τα οποία εφοδιασμένα με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με σταθερά αποκτούν δομή ανάλογη ή ίδια με αυτή της $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$; ΝΑΙ η δομή $(\mathbb{M}^{n,m}, +, \cdot)$. ΄Αλλα;

Παράδειγμα 6

Όπως γνωρίζουμε το άθροισμα δύο πραγματικών συναρτήσεων και το γινόμενο μιας συνάρτησης με πραγματική σταθερά ορίζονται με τις σχέσεις

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \qquad \text{και} \qquad (\lambda f)(x)=\lambda f(x). \tag{3}$$

Αν $\mathscr{C}[0,1]$ είναι το σύνολο των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $[0,1]$ και $f,g\in\mathscr{C}[0,1]$, τότε $f+g\in\mathscr{C}[0,1]$ και $\lambda f\in\mathscr{C}[0,1]$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, αφού το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση στο κοινό πεδίο ορισμού τους καθώς και το γινόμενο συνεχούς συνάρτησης με σταθερά είναι επίσης συνεχής συνάρτηση. Επιπλέον οι νόμοι (V1)-(V8), με $\mathbf{0}$ να είναι η μηδενική συνάρτηση, δηλαδή $\mathbf{0}(t)=0$ για κάθε $t\in[0,1]$, ικανοποιούνται σχεδόν αυτόματα αφού οι πράξεις μεταξύ συναρτήσεων μεταφέρονται μέσω της (3) στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στους πραγματικούς αριθμούς. Κατά συνέπεια η δομή $(\mathscr{C}[0,1],+,\cdot)$ συμπεριφέρεται όπως η $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$.

Παράδειγμα 7

Αν $n \in \mathbb{N}$, με $\mathbb{P}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ n. Αν $p, q \in \mathbb{P}_n$, και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad \text{και} \quad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

και

$$\begin{aligned} (p+q)(x) &= p(x) + q(x) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \cdots + c_n x^n \\ (\lambda p)(x) &= \lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \cdots + \lambda a_n x^n \\ &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n \end{aligned}$$

με $c_k, d_k \in \mathbb{R}$ για $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Επομένως $p + q \in \mathbb{P}_n$ και $\lambda p \in \mathbb{P}_n$. Όπως και στο προηγούμενο Παράδειγμα Δ2.1 είναι εύκολο να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι νόμοι (V1)-(V8).

Ορισμός 1

Έστω $\mathscr{V}$ ένα μή κενό σύνολο. Αν ``$+$'' και ``$\cdot$'' είναι δύο πράξεις, πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, ορισμένες ώστε

$$+ : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}, \qquad \text{και} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$$

για τις οποίες ικανοποιούνται οι νόμοι (V1)-(V8) θα λέμε ότι η τριάδα $(\mathscr{V}, +, \cdot)$ είναι ένας **πραγματικός διανυσματικός χώρος**, (real vector space), ή απλά **διανυσματικός χώρος**. Αν το $\mathbb{R}$ αντικατασταθεί με το $\mathbb{C}$, δηλαδή οι σταθερές στον πολλαπλασιασμό είναι μιγαδικές ο διανυσματικός χώρος λέγεται μιγαδικός. Στη συνέχεια όταν λέμε διανυσματικό χώρο θα εννοούμε πραγματικό διανυσματικό χώρο, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά. Τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου θα τα λέμε **διανύσματα** (vectors).

Έτσι οι $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{M}^{n,m}$ $\mathscr{C}[0,1]$, και $\mathbb{P}_n$ με πράξεις την πρόσθεση διανυσμάτων, μητρώων, ή συναρτήσεων-πολυωνύμων και τον πολλαπλασιασμό με πραγματικές σταθερές είναι τυπικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων. Στη συνέχεια τον τυχαίο διανυσματικό χώρο συμβολίζουμε με απλά κεφαλαία γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, συνήθως, X, Y, Z.