

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

CEID

Διάλεξη 21

15 Δεκεμβρίου 2023

Υπενθύμιση

- 1 Ορισμένες ενδιαφέρουσες βαθμωτές συναρτήσεις μητρώων,
- 2 όπως το ΙΧΝΟΣ και η ΟΡΙΖΟΥΣΑ
- 3 ορισμοί και ιδιότητες & τρόποι υπολογισμού
- 4 επίλυση συστήματος και αντιστροφή μητρώου μέσω οριζουσών.

Σήμερα θα παρουσιάσουμε/συζητήσουμε:

- 1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα
- 2 Τι είναι και γιατί ασχολούμαστε
- 3 Χαρακτηριστικό πολυώνυμο & θεώρημα Cayley-Hamilton
- 4 Μετασχηματισμοί ομοιότητας, ορθογώνιοι μετασχηματισμοί ομοιότητας
- 5 Διαγωνιοποίηση μητρώου
- 6 Φασματικό ανάπτυγμα μητρώου.
- 7 Παραδείγματα

Τι είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα; I

Αποδεικνύεται ότι για κάθε $n \times n$ τετραγωνικό μητρώο A , υπάρχουν $k \leq n$ διακριτές τιμές λ και για κάθε μία από αυτές υπάρχουν διανύσματα x_λ , για τα οποία ισχύει η πολύ απλή σχέση $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$. Το λ λέγεται **ιδιοτιμή** του A και το αντίστοιχο x_λ **ιδιοδιάνυσμα** για την ιδιοτιμή λ του A .

Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός του μητρώου με διανύσματα x_λ (και τα συγγραμμικά τους) είναι ισοδύναμος με τον πολλαπλασιασμό τους με το αντίστοιχο λ . Επιπλέον, τα μητρώα $A - \lambda I$ δεν είναι αντιστρέψιμα.

Θα εξετάσουμε πρώτα:

- Πώς δικαιολογείται η ύπαρξη των λ, x_λ ;
- Παραδείγματα σχετικά με τη γεωμετρική ερμηνεία

Τι είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα; II

Προσοχή:

- Για κάθε μητρώο ισχύει ότι αν $z = 0$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε $Az = A0 = 0$. Παρόλα αυτά, το μηδενικό διάνυσμα ΔΕΝ λαμβάνεται υπόψη ως ιδιοδιάνυσμα. Αντίθετα, μπορεί να ισχύει ότι $Ax = 0 = 0 \cdot x$ για $x \neq 0$, οπότε το x θα είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0$.
- Αν $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$, τότε για κάθε $\gamma \neq 0$ ισχύει ότι $A(\gamma x_\lambda) = \lambda(\gamma x_\lambda)$. Επομένως, κάθε μη μηδενικό πολλαπλάσιο ενός ιδιοδιανύσματος είναι και αυτό ιδιοδιάνυσμα για τη συγκεκριμένη ιδιοτιμή.

- Άρα το μηδενικό διάνυσμα ΔΕΝ θεωρείται ιδιοδιάνυσμα αλλά το μηδέν ΜΠΟΡΕΙ να είναι ιδιοτιμή.
- Συνήθως, όταν αναφερόμαστε σε ιδιοδιανύσματα, θα θεωρούμε ότι τα έχουμε κανονικοποιήσει, δηλ. ότι επιλέγουμε x_λ ώστε $\|x_\lambda\|_2 = 1$.

Τι είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα; III

Για την αιτιολόγηση ύπαρξης, θα περιοριστούμε στην περίπτωση πραγματικών μητρώων διάστασης 2×2 .

Για ένα αυθαίρετο $y \in \mathbb{R}^2$, υπολογίζουμε τα διανύσματα y, Ay, A^2y .

- Αν τα y, Ay είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $Ay = \lambda y$ για κάποιο λ .
- Αν τα y, Ay είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα y, Ay, A^2y είναι οπωσδήποτε γραμμικά εξαρτημένα καθώς ανήκουν στον \mathbb{R}^2 .

Επομένως, αν γράψουμε $Bz = w$ όπου $B = [y, Ay]$ και $w = A^2y$, το γραμμικό σύστημα $Bz = w$ έχει μοναδική λύση. Δηλαδή $[y, Ay]z = A^2y$. Αν $z = [\zeta_1, \zeta_2]^T$, τότε

$$\zeta_1 y + \zeta_2 Ay = A^2 y \Rightarrow A^2 y - \zeta_2 Ay - \zeta_1 y = 0$$

Από το παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε ένα πολυώνυμο $p(r) = r^2 - \zeta_2 r - \zeta_1$. Αυτό είναι βαθμού 2 (όπως και η διάσταση του διανυσματικού χώρου για το παράδειγμα), άρα έχει

Τι είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα; IV

ακριβώς 2 ρίζες, είτε διακριτές ή ίσες μεταξύ τους. Αν τις συμβολίσουμε ρ_1, ρ_2 , τότε $\rho^2 - \zeta_2\rho - \zeta_1$, ισχύει ότι

$$(A^2 - \zeta_2 A - \zeta_1 I)y = 0 \Rightarrow (A - \rho_1 I)(A - \rho_2 I)y = 0$$

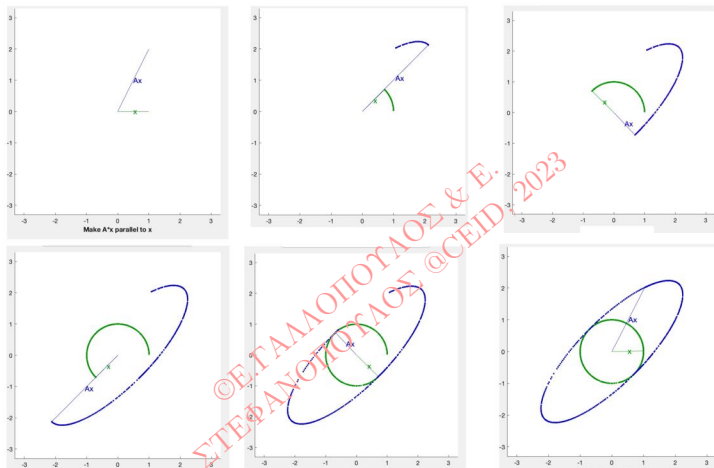
- Επομένως ισχύει ότι τουλάχιστον ένας ή και οι δύο όροι $(A - \rho_1 I), (A - \rho_2 I)$ θα είναι μη αντιστρέψιμος/οι. Γράφουμε τον όρο ως $(A - \rho I)$.
- Ισχύει ότι $\text{null}(A - \rho I) \neq \{0\}$ και ότι $\det(A - \rho I) = 0$.
- Επομένως για κάθε (μη μηδενικό) $x \in \text{null}(A - \rho I)$, $(A - \rho I)x = 0$.
- Επομένως $Ax = \rho x$.

Χρησιμοποιούμε το περιβάλλον MATLAB και τη συνάρτηση-demo `eigshow` του Cleve Moler .

```
1 cd /Users/EG_home/Dropbox/MATLAB/CleveLaboratory/Cleve_Lab
2 % motivational experiments with eigshowA
3 = (1 2; 2 1); eigshow(A);A
4 = (3 -2;1 0); eigshow(A);
```

- Για δοθέν μητρώο A (π.χ. ένα από τα παραπάνω), η συνάρτηση `eigshow`¹ δίνει τη δυνατότητα να παρακολουθούμε για κάθε σημείο (πράσινο) στο μοναδιαίο κύκλο, δηλ για κάθε σημείο που αντιστοιχεί σε μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^2$ $\|x\|_2 = 1$, το σημείο (μπλε) που αντιστοιχεί στο γινόμενο Ax . Οι τιμές αποτυπώνονται στο σχήμα (βλ. επόμενες διαφάνειες).
- Βάσει του `eigshow` μπορούμε να διερευνήσουμε για οποιοδήποτε $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, πότε ισχύει ότι $Ax = \lambda x$ για πραγματικό βαθμωτό λ και μοναδιαίο x .

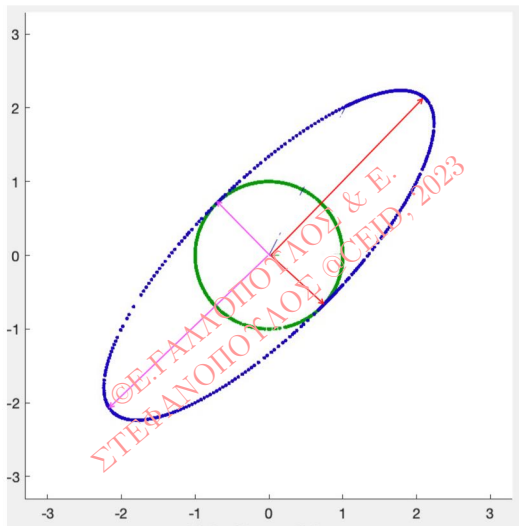
¹Του Cleve Moler για το περιβάλλον MATLAB

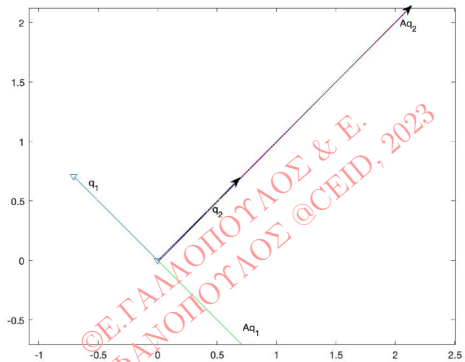


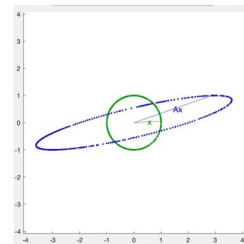
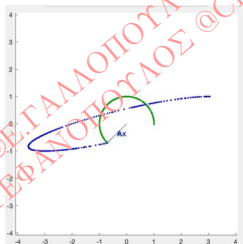
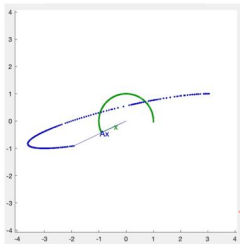
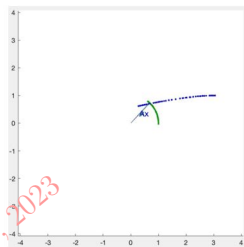
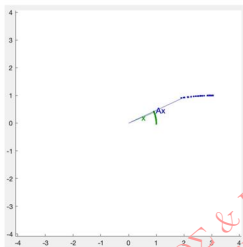
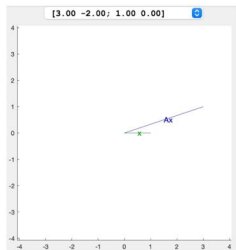
Οι ιδιότητες του $\{Ax | x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}$ (στην περίπτωση είναι μία έλλειψη με άξονες μήκους 3 και 1) εξηγούνται βάσει αυτών που θα μάθουμε στο παρόν κεφάλαιο. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ιδιοτιμές $\Lambda(A) = \{-1, 3\}$, ιδιοδιανύσματα $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Λεπτομερέστερη αποτύπωση των διανυσμάτων για τα οποία $Aq = \lambda q$. Προσέξτε ότι:

- 1 Το μητρώο είναι πραγματικό.
- 2 $A = A^T$, δηλ. το μητρώο είναι συμμετρικό.
- 3 Υπάρχουν δύο τιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ και δύο αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα q_1, q_2 για τα οποία ισχύει ότι $Aq_j = \lambda_j q_j$. Προφανώς, ισχύουν επίσης $A(-q_j) = \lambda_j(-q_j)$ αλλά και $A(\gamma q_j) = \lambda_j(\gamma q_j)$ για οποιοδήποτε βαθμωτό γ .
- 4 Επομένως $Aq_1 = -q_1$, $Aq_2 = 3q_2$ και $A(-q_1) = -(-q_1) = q_1$, $A(-q_2) = -3q_2$. Οι τιμές $\{-1, 3\}$ προσδιορίζουν την κλιμάκωση ή/και αλλαγή φοράς στην οποία υπόκεινται τα διανύσματα $\pm q_1, \pm q_2$ όταν πολλαπλασιαστούν με το A .
- 5 Τα διανύσματα $\pm Aq_1, \pm Aq_2$ συμπίπτουν με τον ελάχιστο και μέγιστο ημιάξονα της έλλειψης.
- 6 $q_1^T q_2 = q_2^T q_1 = 0$, δηλ. τα q_1, q_2 είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

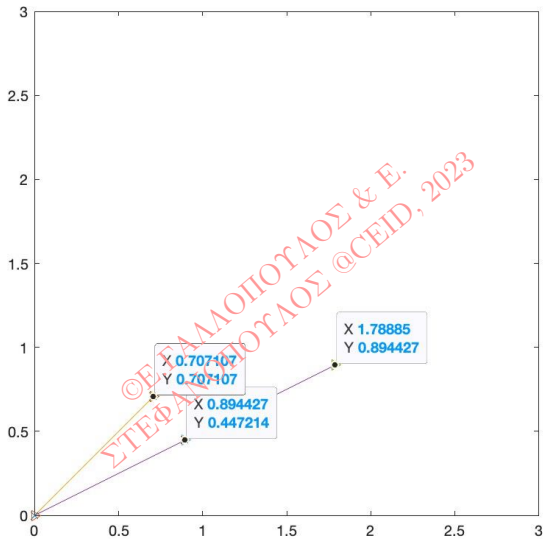






Οι ιδιότητες του $\{Ax | x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}$ (στην περίπτωση είναι μία έλλειψη) εξηγούνται βάσει αυτών που θα μάθουμε στο παρόν κεφάλαιο. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ιδιοτιμές $\Lambda(A) = \{2, 1\}$, ιδιοδιανύσματα $a_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{4} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Λεπτομερέστερη αποτύπωση των διανυσμάτων για τα οποία $Aq = \lambda q$. Προσέξτε ότι:

- 1 Το μητρώο είναι πραγματικό.
- 2 $A \neq A^T$, δηλ. το μητρώο δεν είναι συμμετρικό.
- 3 Υπάρχουν δύο τιμές $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ και δύο αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα q_1, q_2 για τα οποία ισχύει ότι $Aq_j = \lambda_j q_j$. Προφανώς, ισχύουν επίσης $A(-q_j) = \lambda_j(-q_j)$ αλλά και $A(\gamma q_j) = \lambda_j(\gamma q_j)$ για οποιοδήποτε βαθμωτό γ .
- 4 Επομένως $Aq_1 = 2q_1$, $Aq_2 = q_2$ και $A(-q_1) = 2(-q_1)$, $A(-q_2) = -q_2$. Οι τιμές $\{2, 1\}$ προσδιορίζουν την κλιμάκωση ή/και αλλαγή φοράς στην οποία υπόκεινται τα διανύσματα $\pm q_1, \pm q_2$ όταν πολλαπλασιαστούν με το A .
- 5 Τα διανύσματα $\pm Aq_1, \pm Aq_2$ δεν συμπίπτουν με τον ελάχιστο και μέγιστο ημιάξονα της έλλειψης.
- 6 $q_1^T q_2 = q_2^T q_1 \neq 0$, δηλ. τα q_1, q_2 δεν είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

Ορισμοί

Έστω ότι $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε κάθε αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ για τον οποίο το γραμμικό σύστημα $(A - \lambda I)x = 0$ έχει μη μηδενική λύση, $x \in \mathbb{C}^n$, δηλ.

$$\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \text{ τ.ώ. } (A - \lambda I)x = 0,$$

ονομάζεται **ιδιοτιμή** του A και το αντίστοιχο x **ιδιοδιάνυσμα του A** (για την ιδιοτιμή λ). Αντίστοιχα, αν για κάποιο διάνυσμα $x \neq 0$, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ τ.ώ. $Ax = \lambda x$, το x ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα και το λ ιδιοτιμή του A για το x . Τα ζεύγη (λ, x) λέγονται **ιδιοζεύγη**.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα II

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός μητρώου αναδεικνύουν πολλά σημαντικά ζητήματα για ένα μητρώο και για τους διανυσματικούς (υπο)χώρους που συνδέονται με αυτό και χρησιμοποιούνται πολύ στις εφαρμογές.

Δείξαμε ήδη² ότι κάθε τετραγωνικό μητρώο, έχει ιδιοζεύγη.

Ερωτήματα:

- Πόσες είναι οι ιδιοτιμές;
- Πόσα είναι τα ιδιοδιανύσματα; (ή καλύτερα, ποιές είναι οι διαστάσεις των αντίστοιχων μηδενόχωρων?)
- Πού και πώς εντοπίζονται τα ιδιοζεύγη (ιδιοδιανύσματα, ιδιοτιμές)?
- Πώς υπολογίζονται τα ιδιοζεύγη;
- Γιατί είναι σημαντικά και μας ενδιαφέρουν;

Το μηδέν ΜΠΟΡΕΙ να είναι ιδιοτιμή, το μηδενικό διάνυσμα ΔΕΝ θεωρείται ιδιοδιάνυσμα.

²Για την περίπτωση 2×2 , αλλά ας θεωρήσουμε ότι αυτό ισχύει για κάθε τετραγωνικό μητρώο.

The \$25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google*

Kurt Bryan[†]
Tanya Leise[‡]

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of web pages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and *Mathematica* files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/~bryan.

Key words. linear algebra, PageRank, eigenvector, stochastic matrix

Τι λέει και τι γράφει ο κόσμος για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα;



eigenvalues



All

Images

Videos

News

Books

More

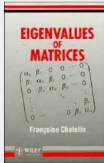
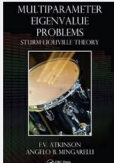
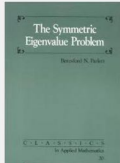
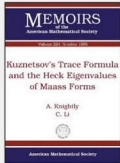
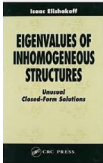
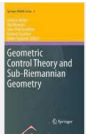
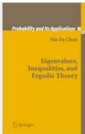
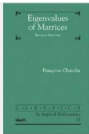
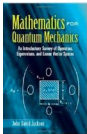
Tools

About 64,200,000 results (1.71 seconds)

Eigenvalues are **a special set of scalars associated with a linear system of equations** (i.e., a matrix equation) that are sometimes also known as characteristic roots, characteristic values (Hoffman and Kunze 1971), proper values, or latent roots (Marcus and Minc 1988, p. 144).

<https://mathworld.wolfram.com> > Eigenvalue

[Eigenvalue](#) → from Wolfram MathWorld



Παράδειγμα

Από το $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ κατασκευάζουμε το παραμετροποιημένο

$$A(\lambda) = \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες εκείνες οι τιμές λ (ενδεχομένως μιγαδικές) για τις οποίες το $A(\lambda)$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Στην περίπτωση μας, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι τα $A(1)$, $A(2)$ δεν είναι αντιστρέψιμα. Επίσης

$$A(1)u_1 = 0, A(2)u_2 = 0$$

και λύνοντας τα αντίστοιχα ομογενή συστήματα προκύπτει ότι (ειδικές) λύσεις τους είναι οι $u_1 = (1, 1)^T$ και $u_2 = (2, 1)^T$. Άρα ισχύει ότι $\text{null}(A(1)) = \text{span}\{u_1\}$ και $\text{null}(A(3)) = \text{span}\{u_2\}$. Επομένως, ως ιδιοδιάνυσμα του για την ιδιοτιμή 1 μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του $\text{null}(A(1))$. Συνήθως, επιλέγουμε διανύσματα που έχουν κανονικοποιηθεί με κάποιον τρόπο, π.χ. τέτοια ώστε $\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = 1$. Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, 1]^T, u_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}[2, 1]^T$$

Προσοχή: Δεν εξηγήσαμε γιατί επιλέξαμε τα $A(1)$, $A(3)$. Ούτε το ότι για το δεδομένο A , αυτά είναι τα μοναδικά δύο μη αντιστρέψιμα μητρώα $\lambda I - A$. Ο σχεδιασμός συστηματικών μεθόδων αναζήτησης και υπολογισμού τους είναι ένα από τα βασικά ζητούμενα του όχι μόνον αυτού του κεφαλαίου, αλλά και πολλών βιβλίων και της σημερινής έρευνας.

Από το $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$ κατασκευάζουμε το παραμετροποιημένο

$$A(\lambda) = \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 12 & \lambda - 7 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες εκείνες οι τιμές λ (ενδεχομένως μιγαδικές) για τις οποίες το $A(\lambda)$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Στην περίπτωση μας, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι τα $A(1)$, $A(3)$ δεν είναι αντιστρέψιμα. Επίσης

$$A(1)u_1 = 0, A(3)u_2 = 0$$

και λύνοντας τα αντίστοιχα ομογενή συστήματα προκύπτει ότι (ειδικές) λύσεις τους είναι οι $u_1 = (1, 2)^T$ και $u_2 = (1, 3)^T$. Προφανώς ισχύει ότι $\text{null}(A(1)) = \text{span}\{u_1\}$ και $\text{null}(A(3)) = \text{span}\{u_2\}$. Επομένως, ως ιδιοδιάνυσμα του για την ιδιοτιμή 1 μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του $\text{null}(A(1))$. Συνήθως, επιλέγουμε διανύσματα που έχουν κανονικοποιηθεί με κάποιον τρόπο, π.χ. τέτοια ώστε $\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = 1$.

Χαρακτηριστικά πολυώνυμα και ιδιοτιμές

Ένα ειδικό πολυώνυμο για κάθε μητρώο

Εξετάζουμε το $\det(\lambda I - A)$ όπου λ είναι μία μεταβλητή:

- Av

$$\begin{aligned}\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \lambda - \alpha_{22} \end{pmatrix} \\ \det(\lambda I - A) &= (-\alpha_{11} + \lambda)(-\alpha_{22} + \lambda) - \alpha_{21}\alpha_{12} \\ &= \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}\end{aligned}$$

- Το $\det(A - \lambda I)$ είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς λ .
- Προσέξτε τους συντελεστές των 2 μεγαλύτερων δυνάμεων λ^2 , λ και τη σταθερά:

$$\gamma_2 = 1,$$

$$\gamma_1 = -(\alpha_{11} + \alpha_{22})$$

$$\gamma_0 = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ονομάζεται το πολυώνυμο βαθμού n με το οποίο ισούται η ορίζουσα

$$\begin{aligned}p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \text{ ή ισοδύναμα} \\ \hat{p}(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = (-1)^n p(\lambda).\end{aligned}$$

- Αν γράψουμε το πολυώνυμο σε δυναμομορφή, τότε

$$p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1 \lambda + \gamma_0$$

Προσέξτε ότι ο βαθμός του πολυωνύμου είναι ακριβώς n (γιατί; $\gamma_{n-1} = -\text{trace}(A)$, $\gamma_0 = (-1)^n \det(A)$)

- Οι ρίζες του χ.π. ονομάζονται **ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ** (του μητρώου).
- Το πολυώνυμο έχει ακριβώς n ρίζες και άρα n ιδιοτιμές. Μερικές ή όλες μπορεί να είναι ίσες (πολλαπλές). Το σύνολο των ιδιοτιμών λέγεται το **φάσμα (spectrum)** του .
- Γράφουμε $p(x) = (x - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (x - \lambda_k)^{\mu_k}$ όπου $k \leq n$ είναι το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών, $1 \leq \mu_j \leq k$ είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_j και $\sum_{j=1}^k \mu_k = n$. Το μ_j λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_j .

Μία ιδέα επίλυσης του ΑΠΙ (ΜΟΝΟΝ ΓΙΑ ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΔΗΛ. ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΑΓΚΕΣ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ!)

- 1 Εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Δαπανηρή και αριθμητικά προβληματική για μεγάλα προβλήματα.
- 2 Υπολογισμός των ριζών του (που είναι οι ιδιοτιμές). Αν $n \geq 5$ τότε δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος υπολογισμού των ριζών και πρέπει να χρησιμοποιηθεί (επαναληπτικός) αλγόριθμος προσέγγισης ριζών πολυωνύμου³.
- 3 Για κάθε ιδιοτιμή, επίλυση του $(A - \lambda I)x = 0$ και επιλογή των ιδιοδιανυσμάτων (ανεύρεση των ειδικών λύσεων). Αλγόριθμος εύρεσης μηδενοχώρου. Η ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΗ ΛΥΣΗ $x = 0$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ

Για κάθε ιδιοτιμή λ_j , συνήθως ενδιαφέρει ένα σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που είναι βάση για το $\text{null}(\lambda_j I - A)$. Αυτά είναι ειδικές λύσεις του $(\lambda I - A)x = 0$. Συνήθως τα διανύσματα επιλέγονται κανονικοποιημένα.

Τα παραπάνω είναι μόνο για μικρά προβλήματα και δεν χρησιμοποιείται: Στην πράξη (π.χ. στη MATLAB) χρησιμοποιούνται ειδικοί αλγόριθμοι (συνάρτηση `eig`) για την εύρεση των ιδιοτιμών (πχ. αλγόριθμος QR). Μάλιστα, το x.p. υπολογίζεται μετά από κλήση στην `eig` για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και με υπολογισμό των συντελεστών της δυναμομορφής από την παραγοντοποιημένη μορφή. Δηλαδή, η διαδικασία που ακολουθείται έχει την αντίθετη φορά από αυτήν που χρησιμοποιούμε εδώ⁴.

³ Η αδυναμία αυτή αποτελεί ένα βασικό εύρημα των Μαθηματικών του 19ου αιώνα (Abel, Ruffini, και Galois)

⁴ Η αριθμητική επίλυση του ΑΠΙ είναι ένα σημαντικό επιστημονικό αντικείμενο των περιοχών της Υπολογιστικής Γραμμικής Άλγεβρας και της Αριθμητικής Ανάλυσης.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\rho(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3), \Lambda(A) = \{1, 3\},$$

$$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2i & 0 & -2i \\ 2i & 4 & -2i & 0 \\ 0 & -2i & 4 & 2i \\ -2i & 0 & 2i & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 4 - 4i)(\lambda - 4 + 4i),$$

$$\Lambda(A) = \{2, 4 + 4i, 4 - 4i\}, \lambda_1 = 4, \mu_1 = 2,$$

$$\lambda_2 = 4 + 4i, \mu_2 = 4 - 4i.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho(\lambda) = (\lambda - 1)^2, \Lambda(A) = \{1\},$$

$$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 2.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\rho(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

$$\Lambda(A) = \{1, 2\}, \lambda_1 = 1, \mu_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = 2, \mu_2 = 2.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 16\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 4)^2$$

επομένως

$$\lambda_1 = 0, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 4, \mu_2 = 2.$$

και

$$\Lambda(A) = \{0, 4\}$$

Ιδιοδιανύσματα

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, Βρήκαμε ότι $\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 1$.

Θέτουμε $(1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(1)x = 0$:

Η τάξη $\text{deg}(A(1)) = 1$, και βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μητρώο μηδενοχώρου για το $A(1)$ είναι το $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα για το λ_1 :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $(3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(3)x = 0$: Η τάξη $\text{deg}(A(3)) = 1$, και

βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μητρώο μηδενοχώρου για το $A(3)$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα για το λ_2 : $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Παρατηρήσεις I

Αν πολλαπλασιάσουμε $(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Δείτε ότι αν $X = (x_1, x_2)$ και $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, τότε

$$AX = X\Lambda$$

Το X είναι **αντιστρέψιμο** γιατί οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές (βλ. [επόμενες διαφάνειες](#)). Είναι επίσης **ορθογώνιο** (λόγω συμμετρίας του A , θα το δούμε και αυτό αργότερα).

Ισχύει επομένως ότι

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή

$$X^{-1}AX = X^T AX = \Lambda.$$

Προσοχή

Ο μετασχηματισμός $A \rightarrow X^{-1}AX$ λέγεται **μετασχηματισμός ομοιότητας** του A με το X . Όταν το X είναι ορθογώνιο, όπως εδώ, χαρακτηρίζεται ως **ορθογώνιος μετασχηματισμός ομοιότητας**. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, η εφαρμογή του μετασχηματισμού, **μετατρέπει το A σε διαγώνιο μητρώο, που περιέχει τις ιδιοτιμές**. Λέμε ότι το μητρώο είναι **διαγωνιοποίηση**. Ένα μητρώο με n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα διαγωνιοποιείται με το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων του.

Ιδιοδιανύσματα I

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ Βρήκαμε ότι } \lambda_1 = 0, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 2, \mu_2 = 2.$$

Θέτουμε $(0) = -A$ και επιλύουμε $-Ax = 0$:

Η τάξη $\text{deg}(A(0)) = 2$, και βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι **μητρώο μηδενικού για**

το $A(0)$ είναι το $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιανύσματα για το

$$\lambda_1 = 0: x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ιδιοδιανύσματα II

Θέτουμε $(4) = 4I - A$ και επιλύουμε $(4I - A)x = 0$:

Η τάξη $\text{deg}(A(4)) = 2$, και βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μητρώο μηδενοχώρου για

το $A(4)$ είναι το
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιανύσματα για το $\lambda_2 = 4$: $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

©Ε.ΓΑΛΑΝΟΠΟΥΛΟΣ & Ε.
ΣΤΕΦΑΝΟΠΟΥΛΟΣ @CEID, 2023

Ιδιοδιανύσματα III

Για το $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, βρήκαμε ότι $\Lambda(A) = \{1\}$, $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 2$.

Θέτουμε $(1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(1)x = 0$:

Η τάξη $\text{deg}(A(1)) = 1$, επομένως η διάσταση του $\text{null}(A(1)) = 1$. Παρατηρούμε ότι $\text{null}(A(1)) < \mu_1$.

Βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μια μηδενοχώρου για το $A(1)$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Κανονικοποιούμε, οπότε το ιδιοδιάνυσμα για το λ_1 είναι $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Προσοχή: Όλα τα ιδιοδιανύσματα του A για το $\lambda_1 = 1$ είναι πολλαπλάσια του x_1 . Δεν υπάρχουν άλλα! Εφόσον η μόνη ιδιοτιμή είναι το $\lambda_1 = 1$, αυτό είναι το μοναδικό ιδιοδιάνυσμα του A .

Μια σημαντική ιδιότητα του Χ.Π.

Η παρατήρηση του Cayley

Είδαμε ότι στην περίπτωση $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

Αντικαθιστούμε το λ με το :

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})A + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})I \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{22} \\ \alpha_{21}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{21} & \alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{22}^2 \end{pmatrix} - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) & 0 \\ 0 & (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Φαίνεται ότι $p(A) = 0$. Αυτό ισχύει για **οποιοδήποτε** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Έστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Τότε

$$p(A) = 0_{n \times n}.$$

A Memoir on the Theory of Matrices

Author(s): Arthur Cayley

Source: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 148 (1858), pp. 17-37

Published by: The Royal Society

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/108649>

Accessed: 03/05/2010 17:45

II. *A Memoir on the Theory of Matrices.* By ARTHUR CAYLEY, Esq., F.R.S.

Received December 10, 1857.—Read January 14, 1858.

THE term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices; and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, *e. g.*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

is said to be a matrix. The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$X = ax + by + cz,$$

$$Y = a'x + b'y + c'z,$$

$$Z = a''x + b''y + c''z,$$

may be more simply represented by

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z),$$



Η \det είναι συνάρτηση **όλων των στοιχείων** του μητρώου, π.χ. για $n = 2$, όλων των

$$\alpha_{11} - \lambda, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} - \lambda$$

Επομένως ΔΕΝ μπορούμε να πούμε ότι $p(A) \equiv \det(A - \lambda I) \det(0) = 0$.

Απόδειξη Cayley-Hamilton Αργότερα ..

Ένα άλλο θέμα: Έστω ότι $Ax = \lambda x$. Τότε $A(\gamma x) = \lambda(\gamma x)$, δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε το ιδιοδιάνυσμα με βαθμωτό, έχουμε πάλι ιδιοδιάνυσμα και η ιδιοτιμή παραμένει αμετάβλητη.

Αν όμως γράψουμε $(\gamma A)x = (\gamma \lambda)x$ δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε το μητρώο με βαθμωτό, το ιδιοδιάνυσμα παραμένει αμετάβλητο και η ιδιοτιμή πολλαπλασιάζεται με το βαθμωτό.

Μια (ακόμα) ιδιομορφία των μητρώων

... επιπλέον των $AB \neq BA$, $= 0$ ακόμα και αν $\neq 0$, $B \neq 0$, που έπεται από το θεώρημα Cayley-Hamilton:

Για τις δυνάμεις $A^n = -\gamma_{n-1}A^{n-1} - \gamma_{n-2}A^{n-2} - \dots + \gamma_1A + \gamma_0I$.

Δηλ. για κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, οι δυνάμεις μεγαλύτερες από $n - 1$ μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός χαμηλότερων δυνάμεων!

Για το αντίστροφο (αν υπάρχει)

$$\begin{aligned} 0 &= A^n + \gamma_{n-1}A^{n-1} + \dots + \gamma_1A + \gamma_0I \\ &= A^{-1} (A^n + \gamma_{n-1}A^{n-1} + \dots + \gamma_1A + \gamma_0I) \end{aligned}$$

επομένως

$$A^{-1} = -\frac{1}{\gamma_0} (A^{n-1} + \gamma_{n-1}A^{n-2} + \dots + \gamma_1I)$$

Παράδειγμα

$$\text{Δίνεται } A = \begin{pmatrix} -36 & 9 \\ -27 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda^2 + 9\lambda - 729 \\ &= \lambda^2 - \underbrace{-9}_{\text{trace}(A)} \lambda + \underbrace{729}_{\det(A)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 + 9A - 729I \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1053 & -81 \\ 243 & 486 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} -36 & 9 \\ -27 & 27 \end{pmatrix} - 729 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ 729I &= A^2 + 9I \Rightarrow 729A^{-1} = A + 9I \\ A^{-1} &= \frac{1}{729} \left(\begin{pmatrix} -36 & 9 \\ -27 & 27 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{729} \begin{pmatrix} -27 & 9 \\ -27 & 36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Βασικός ορισμός

Για κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και μεταβλητή λ , η ορίζουσα $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n . Λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και αν το γράψουμε

$$p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$$

τότε $\gamma_{n-1} = -\text{trace}(A)$ και $\gamma_0 = (-1)^n \det(A)$.

- Το πολυώνυμο έχει ακριβώς n ρίζες $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^n$ που αποκαλούμε **ιδιοτιμές** του.
- Γράφουμε $p(x) = (x - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (x - \lambda_k)^{\mu_k}$ όπου $k \leq n$ είναι το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών, $1 \leq \mu_j \leq k$ είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_j και $\sum_{j=1}^k \mu_k = n$. Το μ_j λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_j .
- Για κάθε ιδιοτιμή λ , υπάρχει **ιδιοδιάνυσμα** $x \in \mathbb{C}^n$ τ.ώ. $Ax = \lambda x$.
- Ισχύει ότι $p(A) = 0$ (**θεώρημα Cayley-Hamilton**).
- τα **ιδιοζεύγη** (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα) μητρώων παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε πληθώρα εφαρμογών.
- Διαφορετικά μητρώα μπορεί να έχουν ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Άλλα πολυώνυμα: Ελάχιστο πολυώνυμο (minimal polynomial) I

Είδαμε ότι αν p_n είναι το χ.π. του $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τότε $p_n(A) = 0$. Το ερώτημα είναι αν υπάρχουν πολυώνυμα μικρότερου βαθμού, π.χ. $q_k, k < n$ τ.ώ. $q_k(A) = 0$.

Ορισμός

Το **ελάχιστο πολυώνυμο** ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι το ελάχιστου βαθμού πολυώνυμο q για οποίο ισχύει ότι $q(A) = 0$. Αν θέσουμε το μέγιστο βαθμίο συντελεστή ίσο με 1, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι **μονικό** και **μοναδικό**.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A διαιρεί ακριβώς το χ.π. του A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = (x-2)^4, q(x) = (x-2)^4$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot p(x) = (x-2)^4, q(x) = (x-2)^3$$

Άλλα πολυώνυμα: Ελάχιστο πολυώνυμο (minimal polynomial) II

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, p(x) = (x-2)^4, q(x) = (x-2)^2$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, p(x) = (x-2)^4, q(x) = x-2$$

©Ε.Γ. ΑΛΛΟΠΟΥΛΟΣ & Ε.
ΣΤΕΦΑΝΟΠΟΥΛΟΣ @CEID, 2023

Γραμμική ανεξαρτησία ιδιοδιανυσμάτων

Πρόταση

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Σκέδιο απόδειξης: Έστω ότι $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ όπου $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Τότε αν υπάρχουν μη μηδενικά γ_1, γ_2 τ.ώ.

$$0 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = \gamma_1 Ax_1 + \gamma_2 Ax_2 = \gamma_1 \lambda_1 x_1 + \gamma_2 \lambda_2 x_2.$$

Ισχύει επίσης ότι $0 = \lambda_2(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) = \lambda_2 \gamma_1 x_1 + \lambda_2 \gamma_2 x_2$ επομένως

$$\gamma_1 \lambda_1 x_1 + \gamma_2 \lambda_2 x_2 = \lambda_2 \gamma_1 x_1 + \lambda_2 \gamma_2 x_2$$

δηλ. $0 = \gamma_1 \lambda_1 x_1 - \lambda_2 \gamma_1 x_1$ επομένως $\lambda_1 = \lambda_2$, άρα άτοπο.

Πόρισμα

Αν ένα μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε θα έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Διαγωνιοποίηση μητρώου I

Έστω ότι γνωρίζουμε n ιδιοζεύγη (λ_j, x_j) του $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2, \dots, Ax_n = \lambda_n x_n$$

Συλλέγουμε και διατυπώνουμε με μητρώα:

$$A[x_1, x_2, \dots, x_n] = [x_1, \dots, x_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

Επομένως

$$AX = X\Lambda,$$

όπου $\Lambda = \text{diag}([\lambda_1, \dots, \lambda_n])$ και $X = [x_1, \dots, x_n]$.

Διαγωνιοποίηση μητρώου II

ΠΡΟΣΞΕΤΕ Αν το X είναι **αντιστρέψιμο**,

$$X^{-1}AX = \Lambda,$$

δηλ. χρησιμοποιώντας τα μητρώα X (με στήλες τα **δεξιά ιδιοδιανύσματα**) και X^{-1} (με στήλες του X^{-*} τα **αριστερά ιδιοδιανύσματα**) **διαγωνιοποιήσαμε** το A .

Κάθε μητρώο για το οποίο υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα χαρακτηρίζεται ως **διαγωνιοποιήσιμο**, ειδάλως λέγεται **μη διαγωνιοποιήσιμο**.

Θεώρημα: Ένα μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο αν και μόνον αν το ελάχιστο πολυώνυμο του μητρώου έχει απλές ρίζες.

Ιδιοδιανύσματα: Δεξιά και Αριστερά

Θα συμβολίζουμε $x^* = \bar{x}^\top$ και $A^* = \bar{A}^\top$ τα συζυγές (ή ερμιτιανό) ανάστροφο του (μιγαδικού) διανύσματος $x \in \mathbb{C}^n$ και του (μιγαδικού) μητρώου A .
 $Av \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $\lambda \in \Lambda(A)$ τότε $\det(\lambda I - A) = 0$ άρα αν συμβολίσουμε με r την τάξη του $\lambda I - A$,

$$r = \text{rank}(\lambda I - A) \leq n - 1.$$

Αφού το μητρώο είναι τετραγωνικό, οι διαστάσεις του μηδενοχώρου και του αριστερού μηδενοχώρου του $A - \lambda I$ είναι ίσες και

$$1 \leq n - r = \dim(\text{null}(\lambda I - A)) = \dim(\text{null}(\bar{\lambda} I - A^*)) \leq n - 1$$

Ιδιοδιανύσματα είναι τα μέλη των μηδενοχώρων αυτών:

δεξιά ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ είναι τα $x \in \text{null}(\lambda I - A)$ δηλ. τ.ώ. $Ax = \lambda x$.

αριστερά ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ είναι τα $y \in \text{null}(\bar{\lambda} I - A^*)$, δηλ. τ.ώ. $y^* A = \lambda y^*$.

Άρα για κάθε ιδιοτιμή λ υπάρχουν

διανύσματα $x \in \text{null}(A - \lambda I)$ ώστε $Ax = \lambda x$ που λέγονται **δεξιά ιδιοδιανύσματα** του A για την ιδιοτιμή λ .

διανύσματα $y \in \text{null}(A^* - \bar{\lambda} I)$ ώστε $y^* A = \lambda y^*$ που λέγονται **αριστερά ιδιοδιανύσματα** του A για την ιδιοτιμή λ .

Ανάπτυγμα μητρώου συναρτήσει ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Αν το μητρώο A διαθέτει n γ.α. ιδιοδιανύσματα, τότε $A = X\Lambda X^{-1}$ όπου Λ το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών και X το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων.

Θυμηθείτε τη γραφή γινομένου μητρώων ως άθροισμα μητρώων πρώτης τάξης (στήλη του 1ου επί γραμμή του 2ου).

Θέτουμε για ευκολία $Y = (X^{-1})^*$, δηλ. Y είναι το συζυγές αντίστροφο του X , τότε μπορούμε να γράψουμε το A με βάση το φασματικό ανάπτυγμα.

$$\begin{aligned} A &= X\Lambda Y^* \\ &= \lambda_1 x_1 y_1^* + \lambda_2 x_2 y_2^* + \dots + \lambda_n x_n y_n^* \end{aligned}$$



Ιδιόχωροι και γεωμετρική πολλαπλότητα ιδιοτιμής

Προσοχή: Για κάθε διαφορετική ιδιοτιμή λ_j :

- ο μηδενόχωρος $\text{null}(\lambda_j I - A)$ λέγεται **ιδιόχωρος** της ιδιοτιμής λ_j .
- Η διάσταση του ιδιόχωρου χαρακτηρίζεται ως **γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_j** .
- Για κάθε ιδιοτιμή ισχύει ότι

$$1 \leq \text{γεωμ. πολλαπλ.}(\lambda_j) \leq \text{αλγεβρ. πολλαπλ.}(\lambda_j)$$

- Αν μία ή περισσότερες ιδιοτιμές ενός μητρώου έχουν γεωμετρική πολλαπλότητα μικρότερη της αλγεβρικής τους, δηλ.

$$1 \leq \text{γεωμ. πολλαπλ.}(\lambda_j) < \text{αλγεβρ. πολλαπλ.}(\lambda_j)$$

αυτές λέγονται **ελλειμματικές** ή **ελαττωματικές** ή **ελλειπείς**⁵ και το μητρώο **ελλειμματικό** ή **ελαττωματικό** ή **ελλειπή**.

- Τα ελλειμματικά μητρώα είναι **μη διαγωνιοποιήσιμα**.

⁵defective

Μητρώα: διαγωνιοποιήσιμα και μη

- Κάθε μητρώο $n \times n$ έχει ακριβώς n ιδιοτιμές. Μπορεί όμως να μην υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα οπότε δεν θα είναι διαγωνιοποιήσιμο.

Παράδειγμα $= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ Κάθε διάνυσμα x τ.ώ $Ax = \lambda x$ είναι πολλαπλάσιο του $x = [1, 0]^T$.

Παράδειγμα $A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{4}{3} \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Κάθε διάνυσμα x τ.ώ $Ax = \lambda x$ είναι πολλαπλάσιο του $x = [-\frac{2}{3}, 1]^T$.

- Αν υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων X είναι αντιστρέψιμο και επομένως θα είναι διαγωνιοποιήσιμο. Ένα μητρώο $n \times n$ είναι διαγωνιοποιήσιμο αν και μόνον αν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
- Αν ένα μητρώο $n \times n$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές, θα έχει n γ.α. ιδιοδιανύσματα και θα είναι διαγωνιοποιήσιμο.
- Αν ένα μητρώο έχει επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές, το μητρώο **ενδέχεται να μην είναι διαγωνιοποιήσιμο**. Για να εξακριβωθεί το κατά πόσον είναι διαγωνιοποιήσιμο όχι, χρειάζεται περισσότερη διερεύνηση.