# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

## Διάλεξη 1+2

## Διανύσματα

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

2 & 4 Οκτωβρίου 2023

**Διδάσκοντες:**

Ευάγγελος Στεφανόπουλος, Ευστράτιος Γαλλόπουλος

**΄Ωρες Γραφείου:**

Τρίτη 11:00-13:00, Πέμπτη 16:00-18:00, ή διαφορετικά κατόπιν συνεννόησης.

**Σύνδεσμος eclass:**

`https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1045/`

**Συγγράμματα:**

- **Εισαγωγή στη Γραμμική ΄Αλγεβρα & Εφαρμογές**, H. Anton, C. Rorres, (μετάφραση) Εκδόσεις Gutenberg.
- **Εισαγωγή στη Γραμμική ΄Αλγεβρα**, G. Strang (μετάφραση της 3ης αγγλικής έκδοσης), Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.
- **Γραμμική ΄Αλγεβρα και Εφαρμογές**, G. Strang (μετάφραση της 4ης αμερικανικής έκδοσης), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- **Γραμμική ΄Αλγεβρα μια Εισαγωγή**, Ε.Σ. σημειώσεις (στο eclass).

## Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη

Η δύναμη του ανέμου ή η ταχύτητα ενός κινητού είναι τυπικές φυσικές οντότητες οι οποίες για να περιγραφούν απαιτούνται περισσότερα δεδομένα απ΄ ότι ένας απλός αριθμός, που θα αρκούσε για παράδειγμα να περιγράψει τη θερμοκρασία ή τη μάζα ενός σώματος.

Τα μεγέθη αυτά τα λέμε **διανυσματικά** και τα αντικείμενα που τα περιγράφουν τα λέμε **διανύσματα**. Ένας φυσιολογικός τρόπος να αποτυπωθεί γραφικά ένα τέτοιο μέγεθος είναι με ένα βέλος με συγκεκριμένη κατεύθυνση (κατεύθυνση του ανέμου) και με συγκεκριμένο μήκος (την ένταση του ανέμου). Μεγέθη τα οποία για να περιγραφούν αρκεί ένας μόνο αριθμός, όπως για παράδειγμα η θερμοκρασία, η μάζα, ο χρόνος, η ισχύς, λέγονται **βαθμωτά**.

Γεωμετρικά ένα διάνυσμα για παράδειγμα στο $\mathbb{R}^3$, παρίσταται με ένα βέλος με αρχή το σημείο $(0,0,0)$, την αρχή των αξόνων, και πέρας ένα σημείο $(b_1, b_2, b_3)$. Τις συντεταγμένες του πέρατος τις λέμε **συνιστώσες** του διανύσματος.

Συμφωνούμε να συμβολίζουμε τα διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ή γενικότερα του $\mathbb{R}^n$ με παχειά γράμματα, για παράδειγμα $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$, και να γράφουμε τις συνιστώσες κάθε διανύσματος σαν στήλη, έτσι έχουμε

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Κάθε τέτοιο διάνυσμα μπορεί να γραφεί, εφαρμόζοντας την πράξη της αναστροφής (θα τη συζητήσουμε αργότερα), ως διάνυσμα-γραμμή στη μορφή

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

## Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων

Εάν **a** και **b** είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ και $\lambda$ ένας πραγματικός αριθμός, στη συνέχεια θα λέμε μια πραγματική σταθερά ή απλά μια σταθερά, ορίζουμε τις πράξεις **πρόσθεση** και **πολλαπλασιασμό με σταθερά** σύμφωνα με

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix},\qquad \lambda\mathbf{a}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\vdots\\\lambda a_n\end{pmatrix} \tag{1}$$

και της αφαίρεσης

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\\vdots\\a_n-b_n\end{pmatrix}=\mathbf{a}+(-1)\mathbf{b}$$

## Ορισμός

Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$

1. Το διάνυσμα $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ λέμε **άθροισμα** των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.
2. Το διάνυσμα του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι ίσες με 0 το λέμε **μηδενικό διάνυσμα** ή απλά μηδέν και το συμβολίζουμε με $\mathbf{0}$.
3. Ορίζουμε το **αντίθετο διάνυσμα** του $\mathbf{u}$ να είναι το διάνυσμα $-\mathbf{u}$ για το οποίο $-\mathbf{u}+\mathbf{u}=\mathbf{0}$.
4. Το διάνυσμα $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ λέμε **διαφορά** του $\mathbf{v}$ από το $\mathbf{u}$. Από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, ή από το (1), έπεται ότι $\mathbf{u}-\mathbf{v}=-\mathbf{v}+\mathbf{u}$.
5. Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι **ίσα** και θα γράφουμε $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ αν και μόνον αν $u_i=v_i$ για κάθε $i=1,2,\ldots,n$.

Σημειώνουμε ότι

$$\mathbf{u}=\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

### Θεώρημα (Ιδιότητες των διανυσμάτων)

*Εάν* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *και* $\mathbf{w}$ *είναι διανύσματα, και* $\lambda$ *και* $\mu$ *είναι πραγματικές σταθερές, τότε ισχύουν οι νόμοι*

1. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
2. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$
3. $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$
4. $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$
5. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$
6. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

### Ορισμός

Εάν $\mathbf{u}$ είναι διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ και

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & \dots & u_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

ορίζουμε το **μέτρο** ή **$\ell_2$-νόρμα** του $\mathbf{u}$ να είναι ο μη αρνητικός αριθμός

$$\|\mathbf{u}\|:=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}.$$

Το μέτρο ή νόρμα του $\mathbf{u}$ είναι η ευκλείδεια απόσταση του σημείου $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ από την αρχή των αξόνων.

## Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι $\|\mathbf{u}\| = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Επίσης αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{u}$ είναι διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned} \|\lambda \mathbf{u}\| &= \sqrt{(\lambda u_1)^2 + (\lambda u_2)^2 + \cdots + (\lambda u_n)^2} \\ &= |\lambda| \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = |\lambda| \|\mathbf{u}\|, \end{aligned}$$

όπου $|\lambda|$ είναι η απόλυτη τιμή του $\lambda$.

## Ορισμός

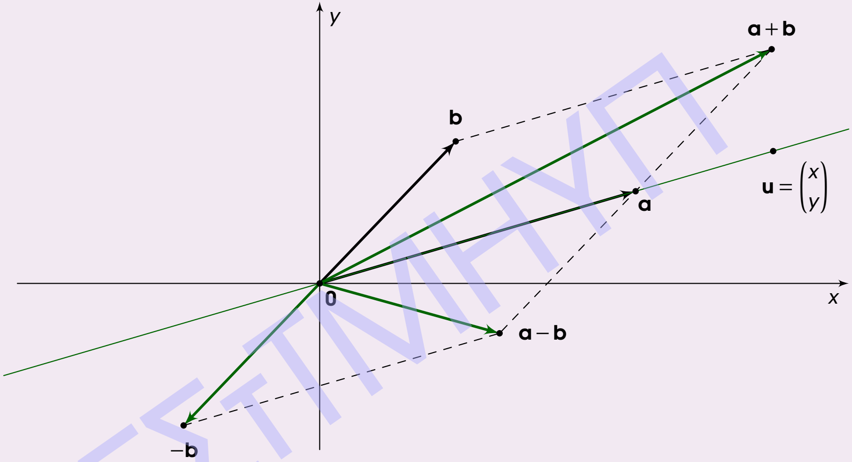
Ένα διάνυσμα $\mathbf{u}$ λέγεται **μοναδιαίο** αν $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Αν το $\mathbf{u}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα, τότε το διάνυσμα $(1/\|\mathbf{u}\|)\mathbf{u}$ είναι μοναδιαίο, αφού

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \|\mathbf{u}\| = 1.$$

Το μοναδιαίο αυτό διάνυσμα το γράφουμε και σαν $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.

## Παρατήρηση (Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω)




**Σχήμα:** Το αθροίσμα και η διαφορά δύο διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ στο $\mathbb{R}^n$. Αν το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου, τότε τα διανύσματα αυτά ορίζουν ένα (μοναδικό) παραλληλόγραμμο και το $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ αντιστοιχεί στη διαγώνιό του από την αρχή των αξόνων.

## Παρατήρηση (συνέχεια)

Αναφερόμενοι στο Σχήμα 1 ας υποθέσουμε ότι

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad a_1 \neq 0.$$

Αν το σημείο $(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας οποία περιέχει το δάνυσμα $\mathbf{a}$, τότε $y = mx$, όπου $m$ είναι η κλίση του τμήματος από το $(0,0)$ στο $(a_1, a_2)$, δηλαδή $m = a_2/a_1$. Έτσι

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = ta_1\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a_1 \\ ma_1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = t\mathbf{a}$$

για κάποιο $t \in \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια **η εξίσωση της ευθείας** η οποία περιέχει το διάνυσμα $\mathbf{a}$ εκφράζεται, σε διανυσματική μορφή, ως

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{a}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας όταν $a_1 = 0$;

### Ορισμός

Αν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ είναι διανύσματα και $c_1, c_2, \dots, c_k$ είναι σταθερές το διάνυσμα

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k$$

λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** (linear combination) των διανυσμάτων $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$.

### Παράδειγμα (1.1)

Εξετάζουμε αν το $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$;

Αναζητάμε σταθερές $\lambda$ και $\mu$ ώστε

$$\mathbf{u} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Κατά συνέπεια το $\mathbf{u}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

## Παρατήρηση

Αν $\mathbf{u}$ είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή κάθε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ισοδύναμα

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3.$$

Υπό αυτή την έννοια μπορούμε να πούμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_3$ παράγουν τον τριδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$.

## Παρατήρηση (συνέχεια)

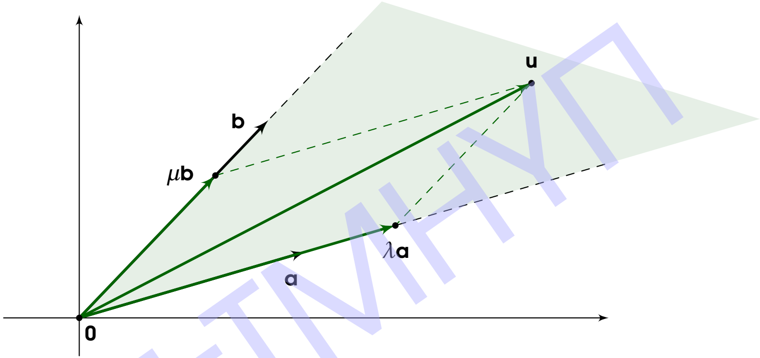
Γενικώς αν στο $\mathbb{R}^n$ ορίσουμε το διάνυσμα $\mathbf{e}_k$ με 1 στην $k$ γραμμή και 0 στις υπόλοιπες, $k = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \cdots, \qquad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

τότε κατ' αναλογία με το $\mathbb{R}^3$ κάθε διάνυσμα $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{e}_k$, δηλαδή

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n.$$

Ας υποθέσουμε ότι **a** και **b** είναι δύο διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ τα οποία δεν περιέχονται στην ίδια ευθεία και **u** ένα τρίτο διάνυσμα ``μεταξύ΄΄ των **a** και **b** όπως στο Σχήμα




Διαμορφώνοντας το παραλληλόγραμμο με διαγώνιο το **u** και ένα ζευγάρι πλευρών κατά μήκος των ευθειών που ορίζουν τα **a** και **b** βλέπουμε ότι υπάρχουν θετικές σταθερές $\lambda$ και $\mu$ (εδώ $\lambda > 1$ και $0 < \mu < 1$) ώστε

$$\mathbf{u} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}.$$

Γενικεύοντας συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των διανυσμάτων

$$S = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \geq 0 \text{ και } \mu \geq 0\}$$

περιγράφει τον ``κώνο'' που ορίζουν τα διανύσματα **a** στο **b**, δηλαδή το τμήμα του επιπέδου μεταξύ της γωνίας από το **a** στο **b** το οποίο περιέχει το $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

### Άσκηση (1.1)

Εάν

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ με $a_1 > b_1 > 0$, $b_2 > a_2 > 0$, όπως στο προηγούμενο σχήμα, εξηγείστε τι περιγράφει καθένα από τα σύνολα

- (α') $S_1 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \leq 0 \text{ και } \mu \leq 0\}$.
- (β') $S_2 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \geq 0\}$.
- (γ') $S_3 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \in \mathbb{R}\}$.
- (δ') $S_4 = \{\mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \mu \in \mathbb{R}\}$.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Το χρωματικό μοντέλο RGB

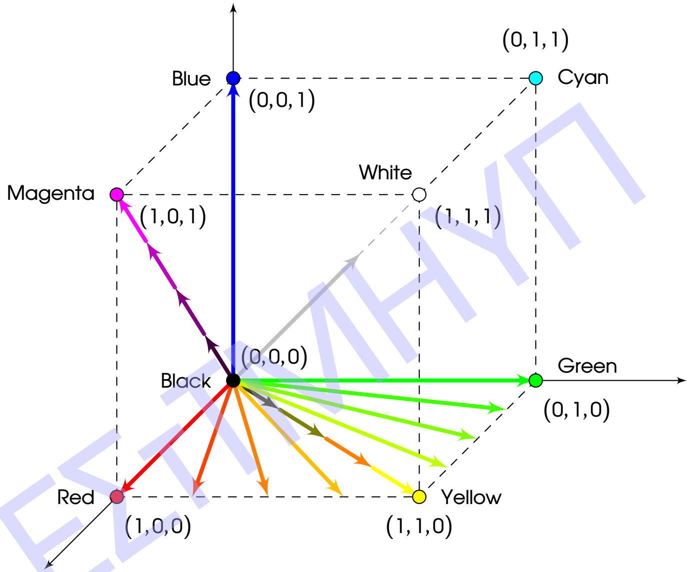
Ο σχηματισμός των χρωμάτων στην οθόνη ενός υπολογιστή στηρίζεται στο μοντέλο RGB. Το όνομα προέρχεται από τα βασικά χρώματα κόκκινο (**R**ed), πράσσινο (**G**reen) και μπλε (**B**lue). Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί στο διάνυσμα **r**, το πράσσινο στο **g** και το μπλε στο **b** όπου

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

βλέπε Σχήμα 2. Τα υπόλοιπα χρώματα παράγονται αναμιγνύοντας κατάλληλες ποσότητες από τα τρία βασικά χρώματα, κατά συνέπεια κάθε χρώμα εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός των **r**, **g** και **b** με συντελεστές μεταξύ 0 και 1, ώστε καθένας από τους συντελεστές να εκφράζει το ποσοστό του αντίστοιχου βασικού χρώματος στο μίγμα. Έτσι το διάνυσμα

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{r} + c_2\mathbf{g} + c_3\mathbf{b} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

αντιστοιχεί στο χρώμα που προκύπτει αναμιγνύοντας $c_1$ μέρη κόκκινου, $c_2$ μέρη πράσσινου, και $c_3$ μέρη μπλε. Τα διανύσματα **r**, **g** και **b** ορίζουν τον **χρωματικό κύβο RGB**.




**Σχήμα:** Ο χρωματικός κύβος RGB.

Στις κορυφές του κύβου πέραν των τριών βασικών χρωμάτων, αντιστοιχούν τα χρώματα κίτρινο, φούξια (magenta), κυανό, μαύρο και άσπρο. Στο σχήμα διακρίνονται τα διανύσματα

$$\frac{1}{4}\mathbf{r}+\frac{1}{4}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0.25\\0\\0.25\end{pmatrix},\qquad \frac{1}{2}\mathbf{r}+\frac{1}{2}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0.5\\0\\0.5\end{pmatrix},\qquad \frac{3}{4}\mathbf{r}+\frac{3}{4}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0.75\\0\\0.75\end{pmatrix},\qquad \mathbf{r}+\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

κατά μήκος της διαγωνίου από το μαύρο στο φούξια, τα

$$\frac{1}{4}\mathbf{r}+\frac{1}{4}\mathbf{g}=\begin{pmatrix}0.25\\0.25\\0\end{pmatrix},\qquad \frac{1}{2}\mathbf{r}+\frac{1}{2}\mathbf{g}=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0\end{pmatrix},\qquad \frac{3}{4}\mathbf{r}+\frac{3}{4}\mathbf{g}=\begin{pmatrix}0.75\\0.75\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{r}+\mathbf{g}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

κατά μήκος της διαγωνίου από το μαύρο στο κίτρινο, καθώς και διάφορα διανύσματα στη βάση του κύβου (στο κόκκινο-πράσινο επίπεδο). Τα διανύσματα της μορφής

$$\mathbf{a}=a\mathbf{r}+a\mathbf{g}+a\mathbf{b}=\begin{pmatrix}a & a & a\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\qquad \text{με}\quad 0<a<1,$$

δηλαδή αυτά κατά μήκος της διαγωνίου από το μαύρο στο άσπρο, αντιστοιχούν στις, τόσες όσοι οι πραγματικοί αριθμοί στο διάστημα $(0,1)$, αποχρώσεις του γκρι.

**Σχήμα:** Τρεις έδρες του χρωματικού κύβου RGB.

## Εσωτερικό γινόμενο

Εάν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, ως

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

### Θεώρημα (Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου)

*Εάν* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *είναι διανύσματα στο* $\mathbb{R}^n$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$, *τότε*

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
3. $\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ *και* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ *αν και μόνο αν* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

### Θεώρημα

*Εάν* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *είναι διανύσματα στο* $\mathbb{R}^n$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$, *τότε*

1. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$.
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.
3. $\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v})$.
4. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
5. $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

**Απόδειξη** Αποδεικνύουμε τα (2), (3) και (4).

(2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(3) $\mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = (\lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

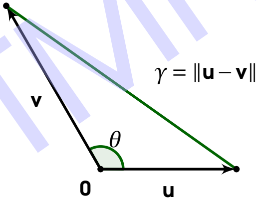
(4)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (-1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

Αν $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\|\mathbf{u}\| = (u_1^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2}$, κατά συνέπεια

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \tag{3}$$

Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι δύο διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ που δεν περιέχονται στην ίδια ευθεία, τότε ορίζουν ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών $\|\mathbf{u}\|$ $\|\mathbf{v}\|$ και $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Αν $\theta$ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, βλέπε Σχήμα, τότε $0 < \theta < \pi$ και από τον νόμο του συνημιτόνου έπεται ότι




$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta. \tag{4}$$

Από την άλλη μεριά από την (3) και τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Συγκρίνοντας τις (4) και (5) βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta.$$

Το αποτέλεσμα ισχύει όταν $\theta = 0$, ή $\theta = \pi$, αφού στην περίπτωση αυτή $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ με $\lambda > 0$ όταν $\theta = 0$, και $\lambda < 0$ όταν $\theta = \pi$. Αποδείξαμε λοιπόν το

**Θεώρημα**

*Εάν* **u** *και* **v** *είναι δύο διανύσματα στο* $\mathbb{R}^n$*, και* $\theta$ *είναι η γωνία μεταξύ των δύο αυτών διανυσμάτων με* $0 \le \theta \le \pi$*, τότε για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο ισχύει*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta. \tag{6}$$