ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 7

Υπόχωροι παραγόμενοι από μητρώο
Η δομή της λύσης συστήματος

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

14 Νοεμβρίου 2022

1. Οι τέσσερις υπόχωροι παραγόμενοι από μητρώο

Έστω ότι A είναι ένα $n \times m$ μητρώο και ας θεωρήσουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Το ερώτημα κατά πόσον το σύστημα έχει λύση είναι ισοδύναμο με το αν υπάχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ώστε $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ισοδύναμα αν το $\mathbf{b}$ είναι η εικόνα κάποιου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ μέσω της απεικόνισης $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, η οποία ορίζεται με τη σχέση

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Κατά συνέπεια ένα $n \times m$ μητρώο μπορεί να ιδωθεί σαν μια απεικόνιση του $\mathbb{R}^m$ στο $\mathbb{R}^n$ και από τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μητρώων έπεται ότι αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ τότε

$$T(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = A(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{y} = \lambda T(\mathbf{x}) + \mu T(\mathbf{y})$$

δηλαδή η απεικόνιση είναι γραμμική. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ σημαντικό, όπως θα δούμε, για την επίλυση συστημάτων. Θυμίζουμε ότι το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση αν και μόνον αν το $\mathbf{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A, ισοδύναμα, σε σχέση με την απεικόνιση T, αν το $\mathbf{b}$ είναι η εικόνα κάποιου $\mathbf{x}$ μέσω της T, δηλαδή το $\mathbf{b}$ περιέχεται στο πεδίο τιμών της T. Έτσι σε αναλογία με τις συναρτήσεις έχουμε

Ορισμός (7.1)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο ορίζουμε

1. Την **εικόνα** (range) του A
$$\operatorname{range} A = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}.$$
2. Τον **μηδενόχωρο** (null space) του A
$$\operatorname{null} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

■ Παρατηρούμε ότι $\operatorname{range} A \subseteq \mathbb{R}^n$ και ότι ένα διάνυσμα $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ περιέχεται στο $\operatorname{range} A$ αν και μόνον αν υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ώστε $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, ισοδύναμα

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}_1 x_1 + \mathbf{c}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{c}_m x_m$$

όπου με $\mathbf{c}_j$ συμβολίζουμε τις στήλες του A. Κατά συνέπεια

$$\operatorname{range} A = \operatorname{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m\}.$$

Επειδή κάθε διάνυγμα διανυσμάτων είναι διανυσματικός υπόχωρος έπεται ότι $\operatorname{range} A$ **είναι διανυσματικός υπόχωρος του** $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός (7.2)

Τον υπόχωρο $\operatorname{range} A$ λέμε και **χώρο στηλών** (column space) του A και ενίοτε συμβολίζουμε με $C(A)$.

Σημειώνουμε ότι η διάστασή του είναι το πολύ n, δηλαδή $\dim(\operatorname{range} A) \leq n$.

■ Όμοια $\operatorname{null} A$ **είναι υπόχωρος του** $\mathbb{R}^m$. Πράγματι αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα του $\operatorname{null} A$, και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$A(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda A \mathbf{u} + \mu A \mathbf{v} = \lambda \mathbf{0} + \mu \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

κατά συνέπεια $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in \operatorname{null} A$, ισοδύναμα το $\operatorname{null} A$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

Παρατήρηση (7.1)

Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος (5.2) είναι ότι αν το A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο τότε οι ισχυρισμοί

1. Το A είναι αντιστρέψιμο.
2. $\operatorname{null} A = \{\mathbf{0}\}$.

είναι ισοδύναμοι.

Παρατήρηση (7.2)

Όμοια, για το $n \times m$ μητρώο A το

$$\operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \{A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\} = C(A^{\mathrm{T}})$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και παράγεται από τις στήλες του A^{T}, ισοδύναμα από τις γραμμές του A. Για τον λόγο αυτό τον υπόχωρο $\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$ λέμε και **χώρο γραμμών** (row space) του A και συμβολίζουμε με $R(A)$. Επίσης τον διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$

$$\operatorname{null} A^{\mathrm{T}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{0}\},$$

λέμε **αριστερό μηδενόχωρο** του A, αφού αν $\mathbf{y} \in \operatorname{null} A^{\mathrm{T}}$, τότε

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}} A = (A^{\mathrm{T}}\mathbf{y})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}.$$

Στη συνέχεια μέσω παραδειγμάτων παρουσιάζουμε ένα συστηματικό τρόπο εύρεσης των τεσσάρων υποχώρων μητρώου.

Παράδειγμα (7.1)

Να βρεθεί ο χώρος στηλών και ο μηδενόχωρος του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ο χώρος στηλών $\operatorname{range} A$ ή $C(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ κατά συνέπεια παράγεται από το πολύ τρεις στήλες του A, επομένως οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επειδή η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R_0 αναδεικνύει τη δομή του A αναζητάμε την (ακμ) R_0 του A.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_0.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν με $\mathbf{c}_j$ και $\mathbf{c}'_j$, $j = 1,2,3,4$ συμβολίσουμε τις στήλες του A και R_0 αντίστοιχα, βλέπουμε ότι οι $\mathbf{c}'_1$ και $\mathbf{c}'_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες ενώ

$$\mathbf{c}'_3 = -\mathbf{c}'_1 + 3\mathbf{c}'_2, \qquad \text{και} \qquad \mathbf{c}'_4 = \mathbf{c}'_1 + \mathbf{c}'_2. \tag{1}$$

Αν L είναι το μητρώο ώστε $LA = R_0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 + x_4\mathbf{c}_4 = \mathbf{b} \\
LA\mathbf{x} &= L(x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 + x_4\mathbf{c}_4) = L\mathbf{b} \\
x_1L\mathbf{c}_1 + x_2L\mathbf{c}_2 &+ x_3L\mathbf{c}_3 + x_4L\mathbf{c}_4) = L\mathbf{b} && \text{(από γραμμικότητα)} \\
R_0\mathbf{x} &= x_1\mathbf{c}'_1 + x_2\mathbf{c}'_2 + x_3\mathbf{c}'_3 + x_4\mathbf{c}'_4 = L\mathbf{b} && (L\mathbf{c}_j = \mathbf{c}'_j) \\
(x_1 - x_3 + x_4)\mathbf{c}'_1 &+ (x_2 + 3x_3 + x_4)\mathbf{c}'_2 = L\mathbf{b} && \text{(από την (1))} \\
L^{-1}((x_1 - x_3 + x_4)\mathbf{c}'_1 &+ (x_2 + 3x_3 + x_4)\mathbf{c}'_2) = L^{-1}L\mathbf{b} \\
(x_1 - x_3 + x_4)L^{-1}\mathbf{c}'_1 &+ (x_2 + 3x_3 + x_4)L^{-1}\mathbf{c}'_2 = \mathbf{b} \\
(x_1 - x_3 + x_4)\mathbf{c}_1 &+ (x_2 + 3x_3 + x_4)\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} && (L^{-1}\mathbf{c}'_j = \mathbf{c}_j).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Κατά συνέπεια μια βάση για τον χώρο στηλών $C(A)$ ή $\operatorname{range} A$ αποτελούν οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A $\mathbf{c}_1$ και $\mathbf{c}_2$, όπως και του R_0, έτσι

$$\operatorname{range} A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = C(A).$$

Αναζητώντας στη συνέχεια μια βάση για τον $\operatorname{null} A$, θεωρούμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, δηλαδή παίρνουμε $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Τότε

$$x_1 - x_3 + x_4 = 0 \qquad \text{και} \qquad x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

οπότε

$$x_1 = x_3 - x_4 \qquad \text{και} \qquad x_2 = -3x_3 - x_4$$

και η λύση του συστήματος είναι

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ -3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\operatorname{null} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αφού τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Σημειώνουμε ότι το τελευταίο αποτέλεσμα μπορούμε να το πάρουμε από τις ισοδυναμίες

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow LA\mathbf{x} = L\mathbf{0} \Leftrightarrow R_0\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα (7.2)

Να βρεθεί ο χώρος γραμμών και ο αριστερός μηδενόχωρος του μητρώου A του Παραδείγματος (7.1).

Πρώτη προσέγγιση. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που ακολουθήθηκε στο Παράδειγμα (7.1) αλλά τώρα για το μητρώο A^{T}. Έτσι βρίσκουμε

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_0'.$$

Δύο από τις τρεις στήλες του R_0' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έτσι επιλέγοντας την πρώτη και την δεύτερη παίρνουμε

$$\operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = C(A^{\mathrm{T}}) = R(A).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Για τον αριστερό μηδενόχωρο του A λύνουμε το σύστημα $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ισοδύναμα

$$R_0'\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

κατά συνέπεια

$$\operatorname{null} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Δεύτερη προσέγγιση. Σε κάθε βήμα της απαλοιφής μια γραμμή προκύπτει από τη πρόσθεση σε αυτή πολλαπλασίου άλλης γραμμής, συνεπώς κάθε γραμμή του R_0 είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A, και αντιστρόφως. Αν με $\mathbf{r}_j$ και $\mathbf{r}_j'$, $j = 1, 2, 3$ συμβολίσουμε τις γραμμές του A και R_0 αντίστοιχα, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2', & \qquad \mathbf{r}_1' &= \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1', & \mathbf{r}_2' &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

κατά συνέπεια $\operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\{\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2\} = \operatorname{span}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\} = R(A)$,ή

$$\operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} = R(A).$$

Το μητρώο L που αναγάγει το A στο R_0 είναι το

$$L = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

(γιατί;). Από την σχέση $LA = R_0$ παρατηρούμε ότι η τελευταία γραμμή του L είναι εκείνη που συνδυάζει τις γραμμές του A και δίνει την μηδενική γραμμή, τρίτη γραμμή, του R_0, έτσι η τελευταία γραμμή του L αποτελεί μια βάση του αριστερού μηδενόχωρου $\operatorname{null} A^{\mathrm{T}}$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Πράγματι

$$(LA)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}} = R_0^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} & A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-1 & 3 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

επομένως

$$\operatorname{null} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

όπως βρήκαμε με την πρώτη προσέγγιση.

2. Τάξη μητρώου

Αν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο τότε οι οδηγοί του A καθορίζουν τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες και τις γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές του A. Συγκεκριμένα οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A και οι γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές του A είναι αντίστοιχα οι στήλες που περιέχουν τους οδηγούς και οι γραμμές που περιέχουν τους οδηγούς, κατά συνέπεια

$$\# \text{ των γρ. ανεξαρτήτων στηλών του } A = \# \text{ των γρ. ανεξαρτήτων γραμμών του } A$$

Ορισμός (7.3)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο ορίζουμε την **τάξη** (rank) του A να είναι το πλήθος των οδηγών του A. Συμβολίζουμε την τάξη του A με $\operatorname{rank} A$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι ότι αν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε

$$\operatorname{rank} A \leq \min\{n, m\}. \tag{2}$$

$$\operatorname{rank} A = \dim C(A) = \dim(\operatorname{range} A). \tag{3}$$

$$\operatorname{rank} A = \dim R(A) = \dim(\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}). \tag{4}$$

Θεώρημα (Θεμελιώδες Θεώρημα, μέρος 1)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο τάξης r, τότε

1. $\dim(\operatorname{null} A) = m - r$.
2. $\dim(\operatorname{null} A^{\mathrm{T}}) = n - r$.

Από το Θεώρημα (ΘΘ1) και την (4) έπεται ότι

$$\dim(\operatorname{null} A) + \dim(\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}) = m - r + r = m = \dim \mathbb{R}^m,$$

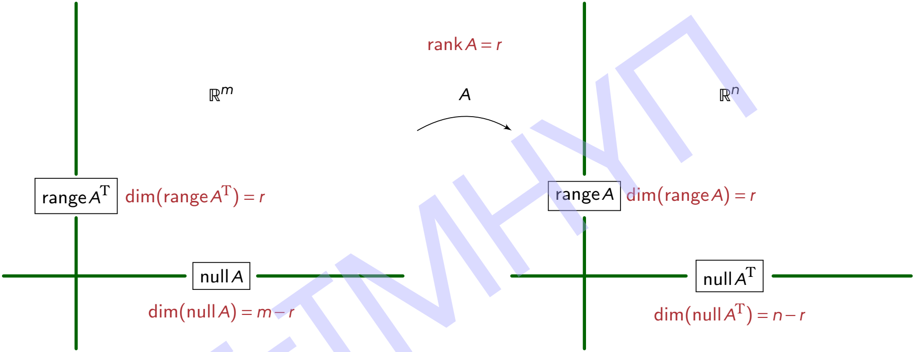
και επειδή οι $\operatorname{null} A$ και $\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι $\operatorname{null} A + \operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \mathbb{R}^m$. Στην πραγματικότητα ισχύει το ισχυρότερο αποτέλεσμα

Θεώρημα (Θεμελιώδες Θεώρημα, μέρος 2)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε

1. $\mathbb{R}^m = \operatorname{null} A \oplus \operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$, *δηλαδή ο* $\mathbb{R}^m$ *είναι το ευθύ άθροισμα των* $\operatorname{null} A$ *και* $\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$.
2. $\mathbb{R}^n = \operatorname{null} A^{\mathrm{T}} \oplus \operatorname{range} A$, *δηλαδή ο* $\mathbb{R}^n$ *είναι το ευθύ άθροισμα των* $\operatorname{null} A^{\mathrm{T}}$ *και* $\operatorname{range} A$.

Σε επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι μεταξύ των υποχώρων που αποτελούν το κάθε ευθύ άθροισμα του Θεμελιώδους Θεωρήματος υπάρχει μια επιπλέον γεωμετρική σχέση, αυτή της καθετότητας. Κωδικοποιημένα μπορούμε να αποτυπώσουμε αυτές τις σχέσεις στο Σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα: Οι τέσσερεις υπόχωροι που παράγονται από μητρώο A διαστάσεων $n \times m$.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

3. Η δομή της λύσης συστήματος

Ας θεωρήσουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου A είναι ένα $n \times m$ μητρώο. Εάν r είναι η τάξη του μητρώου, $r = \operatorname{rank} A$, και $\{\mathbf{x}_1^0, \ldots, \mathbf{x}_{m-r}^0\}$ είναι μια βάση για τον μηδενόχωρο, $\operatorname{null} A$, του A, τότε κάθε λύση του ομοιογενούς συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι της μορφής

$$c_1\mathbf{x}_1^0 + \cdots + c_{m-r}\mathbf{x}_{m-r}^0. \tag{5}$$

Ονομάζουμε την (5) **γενική λύση του ομοιογενούς συστήματος**. Ο χαρακτηρισμός γενική λύση δικαιολογείται από το γεγονός ότι αν $\mathbf{x}'$ είναι μια λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, τότε η $\mathbf{x}'$ προκύπτει από την (5) με κατάλληλη επιλογή των c_k. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $\mathbf{x}_p$ είναι μια λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, μια όπως λέμε **ειδική λύση** (particular solution). Αν $\mathbf{x}$ είναι μια επίσης λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, τότε η $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ είναι λύση του ομοιογενούς προβλήματος. Πράγματι

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

κατά συνέπεια υπάρχουν σταθερές $c_1, \ldots, c_{m-r}$ ώστε

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_p = c_1\mathbf{x}_1^0 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{m-r}^0 = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p.$$

Αποδείξαμε λοιπόν το ακόλουθο

Θεώρημα (7.1)

Εάν $\mathbf{x}_p$ *είναι μια* **ειδική** *λύση του συστήματος* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*, τότε η* **γενική** *λύση του συστήματος είναι της μορφής*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p,$$

όπου $\mathbf{x}_0$ *είναι η γενική λύση του ομοιογενούς συστήματος.*

Παράδειγμα (7.3)

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια το $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι μια **ειδική λύση** για το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου A είναι το μητρώο στο αριστερό μέρος του γινομένου, με $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Είδαμε στο Παράδειγμα (7.2) ότι μια βάση για τον μηδενόχωρο του A είναι η

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα (7.1), η **γενική λύση** του συστήματος $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ είναι

$$\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-5\\1\\1\end{pmatrix}, \tag{6}$$

όπου c_1, c_2 είναι πραγματικές παράμετροι.

Για επιβεβαίωση από το επαυξημένο μητρώο $\begin{pmatrix}A & \mathbf{b}\end{pmatrix}$ του συστήματος παίρνουμε

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

οπότε το ισοδύναμο σύστημα είναι

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 4 + x_3 - x_4 \\ x_2 &= -1 - 3x_3 - x_4 \end{aligned}\right.$$

Έτσι η λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + x_3 - x_4 \\ -1 - 3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Διατυπώνεται το ερώτημα κατά πόσον οι (6) και (7) συμφωνούν. Παρατηρούμε ότι για $x_3 = \lambda + 1$ και $x_4 = \mu + 1$ έχουμε

$$(\lambda+1)\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix} + (\mu+1)\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-5\\1\\1\end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια οι δύο λύσεις είναι ισοδύναμες, και αυτό ακριβώς το αποτέλεσμα δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό μιας τέτοιας λύσης ως γενική. Ειδικά η $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix}4 & -5 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ προκύπτει από την (7) για $x_3 = x_4 = 1$.

Παρατήρηση (7.3)

Εάν A και B είναι μητρώα συμβατών διαστάσεων ώστε να ορίζεται το AB δημιουργείται το ερώτημα εάν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των τάξεων των A, B και AB. Ας δούμε σαν παράδειγμα μια απλή περίπτωση, όπου τα A και B είναι 2×2 μητρώα. Υπολογίζοντας ή για την ακρίβεια γράφοντας

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

βλέπουμε ότι

- αν οι γραμμές του A είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε και οι γραμμές του AB είναι γραμμικά εξαρτημένες, ή
- αν οι στήλες του B είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε και οι στήλες του AB είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Κατά συνέπεια $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

Παράδειγμα (7.4)

Αν $A = QS$, όπου

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} S = 2$$

το A είναι 3×3, αλλά $\operatorname{rank} A \leq 2$. Πράγματι

$$A = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} 3 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} (-1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} 0 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} (-2) \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} 0 \end{pmatrix},$$

Οι στήλες του A (γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του Q), ή οι γραμμές του A (γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του S) παράγονται από δύο διανύσματα.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επομένως για τον χώρο στηλών του A έχουμε

$$C(A) = \operatorname{range} A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

και για τον χώρο γραμμών του A

$$R(A) = \operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Έτσι $\operatorname{rank} A = 2$, γεγονός που περιμέναμε αφού

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & -2\\1 & 0\end{pmatrix} = 2 \qquad \text{και} \qquad \operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\3 & 0 & 1\end{pmatrix} = 2.$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα έπεται ότι $\dim(\operatorname{null} A) = 3 - 2 = 1$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επειδή $\operatorname{rank} Q = 2 = \operatorname{rank} S$ έχουμε ότι $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow S\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ή

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Με απαλοιφή βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Έτσι η λύση της (8) είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_3 \\ \frac{5}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

επομένως

$$\operatorname{null} A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

Για την εύρεση του αριστερού μηδενόχωρου του A, από την $A = QS$ παίρνουμε $A^{\mathrm{T}} = S^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}$, και όπως πριν αφού $\operatorname{rank} Q = 2 = \operatorname{rank} S$ έχουμε $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow Q^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Και πάλι με απαλοιφή βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\1 & -2 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 7 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 1 & 1/7\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 2/7\\0 & 1 & 1/7\end{pmatrix}.$$

Η λύση λοιπόν της $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{7}x_3\\-\frac{1}{7}x_3\\x_3\end{pmatrix} = -\frac{x_3}{7}\begin{pmatrix}2\\1\\-7\end{pmatrix}$$

επομένως

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\operatorname{null} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}.$$

Μητρώα τάξης ένα. Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα, ας πούμε στο $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_1\mathbf{u} & v_2\mathbf{u} & v_3\mathbf{u} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \\ u_2\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \\ u_3\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

δηλαδή $\operatorname{rank} \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = 1$. Όμοια αν $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, τότε το μητρώο $\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ έχει τάξη ένα. Το αυτό ισχύει και για το μητρώο $\mathbf{v}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$. Δείξτε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν το $n \times m$ μητρώο A είναι τάξης ένα, τότε υπάρχουν διανύσματα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ ώστε $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$.

Χάριν πληρότητας αναφέρουμε επίσης ότι

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε μητρώο στο δεξί μέλος της (9) είναι τάξης ένα. Τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν προφανώς για γινόμενα μητρώων γενικότερων συμβατών διαστάσεων. Έτσι αν το $A = \left(a_{ij}\right)$ είναι ένα $n \times m$ μητρώο, το $B = \left(b_{ij}\right)$ είναι ένα $m \times k$ μητρώο και για το τυπικό μητρώο $M \in \mathbb{M}^{n,m}$ με M_{i*} συμβολίσουμε, ως συνήθως, την i-γραμμή του M, ως διάνυσμα-στήλη, και με M_{*j} την j-στήλη του M, έχουμε

$$\begin{aligned} (AB)_{*j} &= b_{1j}A_{*1} + b_{2j}A_{*2} + \cdots + b_{mj}A_{*m}, \qquad & j = 1,2,\ldots,k \\ (AB)_{i*} &= a_{i1}B_{1*} + a_{i2}B_{2*} + \cdots + a_{im}B_{m*}, \qquad & i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned}$$

Η γενίκευση της (9) είναι

$$AB = A_{*1}B_{1*}^{\mathrm{T}} + A_{*2}B_{2*}^{\mathrm{T}} + \cdots + A_{*m}B_{m*}^{\mathrm{T}}$$

από την οποία έπεται ότι το γινόμενο δύο μητρώων διασπάται σε ένα άθροισμα μητρώων τάξης ένα.