ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 5

Υπολογισμός του αντίστροφου μητρώου
Διανυσματικοί χώροι

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

31 Οκτωβρίου 2022

1. Άνω-κάτω τριγωνική παραγοντοποίηση (LU)

Παρατηρούμε ότι

$$E_2A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 \\ 0 & -2 & 8 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} = A_2$$

$$E_3A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & -18 \end{pmatrix} = A_3$$

$$E_4A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -18 \end{pmatrix} = A_4$$

$$E_5A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = A_5$$

$$E_6A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R.$$

Για το τετραγωνικό μητρώο (προκύπτει από το μητρώο A_1 στο **Παράδειγμα (4.7)** αν διαγράψουμε τη δεύτερη και τη πέμπτη στήλη)

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 \\ 0 & -2 & 8 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

η διαδικασία της απαλοιφής Gauss, **κατά την οποία δεν υπάρχει μετάθεση γραμμών** καταλήγει στο αποτέλεσμα

$$E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

όπου το U είναι ένα άνω τριγωνικό μητρώο, συνεπώς

$$A = (E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} E_5^{-1} E_6^{-1}) U$$

όπου

$$E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Το γινόμενο στα αριστερά του U υπολογίζεται εύκολα αν αναλογιστούμε τον τρόπο δράσης ενός στοιχειώδους μητρώου στο μητώο το οποίο πολλαπλασιάζει από αριστερά, έτσι βρίσκουμε

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 \\ 0 & -2 & 8 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ή} \qquad A = LU.$$

Το A εκφράζεται ως γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού και ενός άνω τριγωνικού μητρώου. Το αποτέλεσμα αυτό εκφράζεται ως **άνω-κάτω τριγωνική παραγοντοποίηση**, ή και **LU παραγοντοποίηση** (Lower-Upper decomposition or factorization).

Θεώρημα (5.1)

Εάν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο του οποίου η κλιμακωτή μορφή προκύπτει δίχως εναλλαγή γραμμών, τότε το μητρώο παραγοντοποιείται ως $A = LU$, όπου το L είναι ένα κάτω τριγωνικό μητρώο και το U ένα άνω τριγωνικό μητρώο.

2. Το αντίστροφο μητρώο

Έστω A ένα τετραγωνικό μητρώο και ας θεωρήσουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Αν το A είναι αντιστρέψιμο, τότε πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με A^{-1} παίρνουμε

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}, \tag{1}$$

αφού $A^{-1}A = I$, κατά συνέπεια το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\mathbf{b}$. Ειδικά αν $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ και το A είναι αντιστρέψιμο, τότε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την μηδενική $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Θεώρημα (5.2)

Αν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

1. *Το A είναι αντιστρέψιμο.*
2. *Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την μηδενική.*
3. *Το A είναι γραμμοϊσοδύναμο με το ταυτοτικό μητρώο I.*
4. *Αν R_0 είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A, τότε $R_0 = I$.*

Απόδειξη.

Αποδεικνύουμε τις συνεπαγωγές $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$ Αν το A είναι αντιστρέψιμο όπως στην (1) έπεται ότι η λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι η $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Επιλύοντας το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ με απαλοιφή Gauss-Jordan καταλήγουμε, από την υπόθεση στο $I\mathbf{x} = \mathbf{0}$, κατά συνέπεια το A είναι γραμμοϊσοδύναμο με το ταυτοτικό μητρώο I.

$(3) \Rightarrow (1)$ Αφού το A είναι γραμμοϊσοδύναμο με το I υπάρχουν στοιχειώδη μητρώα $E_1, \dots, E_k$ ώστε $E_k \cdots E_1 A = I$, κατά συνέπεια

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} I = (E_k \cdots E_1)^{-1}.$$

Έτσι το A είναι ίσο με ένα αντιστρέψιμο μητρώο, επομένως είναι και το ίδιο αντιστρέψιμο.

Από τον ορισμό της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής έπεται ότι $(3) \Leftrightarrow (4)$, κατά συνέπεια τα (1), (2), (3), (4) είναι ισοδύναμα. □

Υπολογισμός του αντίστροφου μητρώου

Το Θεώρημα (5.2) μας δίνει ένα συστηματικό τρόπο ελέγχου κατά πόσον το αντίστροφο μητρώου υπάρχει και την ίδια στιγμή και τρόπο υπολογισμού του. Αν λοιπόν για το τετραγωνικό μητρώο A υπάρχει το αντίστροφο, έστω X τότε $AX = I$, επιπλέον υπάρχουν στοιχειώδη μητρώα $E_1, \ldots, E_k$ τα οποία διεκπεραιώνουν την απαλοιφή Gauss-Jordan ώστε $E_k \cdots E_1 A = R_0 = I$. Έτσι θα έχουμε

$$AX = I \Leftrightarrow E_k \cdots E_1 AX = E_k \cdots E_1 I \Leftrightarrow IX = X = L$$

όπου $L = E_k \cdots E_1$. Έτσι ξεκινώντας από το μητρώο $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$ με τη διαδικασία απαλοιφής παίρνουμε

$$E_k \cdots E_1 \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k \cdots E_1 A & E_k \cdots E_1 I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & E_k \cdots E_1 \end{pmatrix}$$

ή σχηματικά

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} I & L \end{pmatrix}$$

και το μητρώο $L = E_k \cdots E_1$ είναι το A^{-1}. Κατά συνέπεια αν για κάποιο τετραγωνικό μητρώο A ξεκινώντας από το μητρώο $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$ και εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών καταλήξουμε σ' ένα μητρώο $\begin{pmatrix} I & L \end{pmatrix}$, τότε το A αντιστρέφεται και $A^{-1} = L$.

Παράδειγμα (5.1)

Σύμφωνα με την Άσκηση (3.2)

$$\text{αν} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{τότε} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δείχνουμε το αποτέλεσμα με τη διαδικασία που περιγράψαμε. Πράγματι διαμορφώνοντας το μητρώο $\begin{pmatrix} A \; I \end{pmatrix}$ με τις κατάλληλες στοιχειώδεις πράξεις παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to -r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Στο αριστερό μπλοκ του τελευταίου μητρώου εμφανίζεται το μοναδιαίο I ενώ στο δεξιό μπλοκ βλέπουμε το αναμενόμενο A^{-1}.

Παρατήρηση (5.1)

Γενικεύοντας το αποτέλεσμα του Παραδείγματος (5.1) για 2×2 μητρώα, έχουμε ότι για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

υπάρχει το αντίστροφο αν και μόνο αν η ορίζουσα του A είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή $\det A = ad - bc \neq 0$ και αν αυτό ισχύει, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Μπορεί να δειχθεί, με πράξεις, ότι για 2×2 μητρώα A και B ισχύει $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, έτσι αν $\det A \neq 0$, τότε

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det I$$

$$\Rightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Παράδειγμα (5.2)

Για να βρούμε το αντίστροφο του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

η διαδικασία σχηματικά είναι $\begin{pmatrix} A \; I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I \; X \end{pmatrix}$. Έτσι έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα (5.3)

Να βρεθεί το αντίστροφο του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

εφόσον αυτό υπάρχει.

Ξεκινώντας από το μητρώο $\begin{pmatrix} A \; I \end{pmatrix}$ και εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών θέλουμε να καταλήξουμε σε ένα μητρώο $\begin{pmatrix} I \; X \end{pmatrix}$. Έτσι έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία της απαλοιφής Gauss καταλήγει σε ένα μητρώο με μηδενική γραμμή στο αριστερό μπλοκ όπου αναμένεται το ταυτοτικό μητρώο. Κατά συνέπεια το μητρώο δεν αντιστρέφεται.

Παρατήρηση (5.2)

Τι συμβαίνει και το μητρώο A του Παραδείγματος (5.2) δεν αντιστρέφεται; Αν με A_{*j}, $j = 1, 2, 3$, συμβολίσουμε τις στήλες του A, τότε $2A_{*1} + A_{*2} = A_{*3}$, συνεπώς μια στήλη του του A είναι γραμμικός συνδυασμός άλλων στηλών. Ας δοκιμάσουμε να λύσουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ξεκινώντας από το μητρώο $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι αν $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, το τελευταίο μητρώο αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Έτσι το σύστημα, όπως αναμενόταν εξάλλου υπό το πρίσμα του Θεωρήματος (5.2), έχει μη μηδενικές λύσεις, άπειρες το πλήθος.

Θεώρημα (5.3)

Έστω A ένα τετραγωνικό μητρώο. Εάν υπάρχει τετραγωνικό μητρώο B ώστε $BA = I$, ή $AB = I$, τότε $B = A^{-1}$.

Απόδειξη.

Έστω ότι υπάρχει τετραγωνικό B ώστε $BA = I$. Για να δείξουμε ότι το A είναι αντιστρέψιμο αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την μηδενική. Θεωρούμε λοιπόν το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και πολλαπλασιάζοντας με B παίρνουμε διαδοχικά

$$BA\mathbf{x} = B\mathbf{0} \Rightarrow I\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

κατά συνέπεια το A είναι αντιστρέψιμο. Και πάλι από την υπόθεση $BA = I$ παίρνουμε

$$BAA^{-1} = IA^{-1} \Rightarrow BI = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}.$$

Έστω τώρα ότι $AB = I$, τότε από το πρώτο μέρος της απόδειξης έπεται ότι η μοναδική λύση του συστήματος $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι η μηδενική, κατά συνέπεια το B είναι αντιστρέψιμο και $A = B^{-1}$. Το A όντας ίσο με το αντιστρέψιμο μητρώο B^{-1} είναι αντιστρέψιμο και $A^{-1} = \left(B^{-1}\right)^{-1} = B$. □

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Εφοδιάζοντας το $\mathbb{R}^n$ με την πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων και με τον πολλαπλασιασμό διανύσματος επί σταθερά ώστε το αποτέλεσμα της κάθε πράξης να είναι διάνυσμα, σχηματικά

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \text{και} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

διαμορφώσαμε την **δομή** $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ για την οποία, γράφοντας X αντί για $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζοντας τα διανύσματα με συνήθεις χαρκτήρες, ισχύουν οι νόμοι

- V1 $x + y = y + x$, για κάθε $x, y \in X$
- V2 $x + (y + z) = (x + y) + z$, για κάθε $x, y, z \in X$
- V3 υπάρχει $0 \in X$ τέτοιο ώστε $0 + x = x$ για κάθε $x \in X$
- V4 για κάθε $x \in X$ υπάρχει $-x \in X$ έτσι ώστε $-x + x = 0$
- V5 $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- V6 $1x = x$, για κάθε $x \in X$
- V7 $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$
- V8 $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ερώτημα: Υπάρχουν άλλα σύνολα τα οποία εφοδιασμένα με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με σταθερά αποκτούν δομή ανάλογη ή ίδια με αυτή της $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$; ΝΑΙ η δομή $(\mathbb{M}^{n,m}, +, \cdot)$. ‘Αλλα;

Παράδειγμα (5.4)

Όπως γνωρίζουμε το άθροισμα δύο πραγματικών συναρτήσεων και το γινόμενο μιας συνάρτησης με πραγματική σταθερά ορίζονται με τις σχέσεις

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad \text{και} \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \tag{2}$$

Αν $\mathscr{C}[0,1]$ είναι το σύνολο των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $[0,1]$ και $f, g \in \mathscr{C}[0,1]$, τότε $f+g \in \mathscr{C}[0,1]$ και $\lambda f \in \mathscr{C}[0,1]$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, αφού το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση στο κοινό πεδίο ορισμού τους καθώς και το γινόμενο συνεχούς συνάρτησης με σταθερά είναι επίσης συνεχής συνάρτηση. Επιπλέον οι νόμοι (V1)-(V8), με $\mathbf{0}$ να είναι η μηδενική συνάρτηση, δηλαδή $\mathbf{0}(t) = 0$ για κάθε $t \in [0,1]$, ικανοποιούνται σχεδόν αυτόματα αφού οι πράξεις μεταξύ συναρτήσεων μεταφέρονται μέσω της (2) στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στους πραγματικούς αριθμούς. Κατά συνέπεια η δομή $(\mathscr{C}[0,1], +, \cdot)$ συμπεριφέρεται όπως η $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Παράδειγμα (5.5)

Αν $n \in \mathbb{N}$, με $\mathbb{P}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ n. Αν $p, q \in \mathbb{P}_n$, και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad \text{και} \quad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

και

$$\begin{aligned}
(p+q)(x) &= p(x) + q(x) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\
&= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \cdots + c_n x^n \\
(\lambda p)(x) &= \lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \cdots + \lambda a_n x^n \\
&= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n
\end{aligned}$$

με $c_k, d_k \in \mathbb{R}$ για $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Επομένως $p + q \in \mathbb{P}_n$ και $\lambda p \in \mathbb{P}_n$. Όπως και στο προηγούμενο Παράδειγμα Δ2.1 είναι εύκολο να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι νόμοι (V1)-(V8).

Ορισμός (5.1)

Έστω $\mathscr{V}$ ένα μή κενό σύνολο. Αν ``+'' και ``·'' είναι δύο πράξεις, πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, ορισμένες ώστε

$$+ : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}, \qquad \text{και} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$$

για τις οποίες ικανοποιούνται οι νόμοι (V1)-(V8) θα λέμε ότι η τριάδα $(\mathscr{V}, +, \cdot)$ είναι ένας **πραγματικός διανυσματικός χώρος**, (real vector space), ή απλά **διανυσματικός χώρος**. Αν το $\mathbb{R}$ αντικατασταθεί με το $\mathbb{C}$, δηλαδή οι σταθερές στον πολλαπλασιασμό είναι μιγαδικές ο διανυσματικός χώρος λέγεται μιγαδικός. Στη συνέχεια όταν λέμε διανυσματικό χώρο θα εννοούμε πραγματικό διανυσματικό χώρο, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά. Τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου θα τα λέμε **διανύσματα** (vectors).

Έτσι οι $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{M}^{n,m}$ $\mathscr{C}[0,1]$, και $\mathbb{P}_n$ με πράξεις την πρόσθεση διανυσμάτων, μητρώων, ή συναρτήσεων-πολυωνύμων και τον πολλαπλασιασμό με πραγματικές σταθερές είναι τυπικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων. Στη συνέχεια τον τυχαίο διανυσματικό χώρο συμβολίζουμε με απλά κεφαλαία γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, συνήθως, X, Y, Z.

Παρατήρηση (5.3)

Αν p είναι ένα πολυώνυμο στον χώρο $\mathbb{P}_n$ και $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n$, τότε η απεικόνιση $L : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ που ορίζεται με τη σχέση

$$L(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

είναι ένα-προς-ένα και επί και επιπλέον για $p, q \in \mathbb{P}_n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$L(p+q) = L(p) + L(q), \qquad \text{και} \qquad L(\lambda p) = \lambda L(p). \tag{3}$$

Μια τέτοια ένα-προς-ένα απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων λέγεται **ισομορφισμός** και η ύπαρξη ενός ισομορφισμού μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων δηλώνει ότι οι δύο χώροι, πρακτικά, ταυτίζονται. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεχόμαστε ότι η k-συνιστώσα ενός διανύσματος στο $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι ο συντελεστής του x^{k-1}, $k = 1, 2, \ldots n+1$.

Παρατήρηση (συνέχεια)

Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε την αντιστοιχία

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2 - 3x + x^2 \in \mathbb{P}_2.$$

Επίσης το άθροισμα διανυσμάτων ή το γινόμενο διανύσματος με σταθερά αντιστοιχεί και δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με το άθροισμα των αντιστοίχων πολυωνύμων ή το γινόμενο του αντίστοιχου πολυωνύμου με την σταθερά.

Ορισμός (5.2)

Αν $(X, +, \cdot)$ και $(Y, +, \cdot)$ είναι διανυσματικοί χώροι μια απεικόνιση $F : X \to Y$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$F(x+y) = F(x) + F(y), \qquad \text{και} \qquad F(\lambda x) = \lambda F(x), \tag{4}$$

για κάθε x και y στο X και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, θα λέγεται **γραμμική απεικόνιση** (linear map) ή **γραμμικός μετασχηματισμός** (linear transformation).

Παράδειγμα (5.6)

Θεωρούμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των **u** και **v** αποτελούν διανυσματικό χώρο.

Αν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix},$$

έτσι αν ονομάσουμε W το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών τότε

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad z = x + y \right\}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν **w** και **z** είναι διανύσματα στο W, τότε

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} p \\ p+q \\ q \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} r \\ r+s \\ s \end{pmatrix}$$

οπότε για $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathbf{w}+\mathbf{z} = \begin{pmatrix} p+r \\ (p+q)+(r+s) \\ q+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+r \\ (p+r)+(q+s) \\ q+s \end{pmatrix}, \quad \lambda\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda(p+q) \\ \lambda q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda p+\lambda q \\ \lambda q \end{pmatrix}$$

κατά συνέπεια $\mathbf{w}+\mathbf{z} \in W$ και $\lambda\mathbf{w} \in W$. Το μηδενικό διάνυσμα περιέχεται στο W αφού $\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v}$. Επίσης αν $\mathbf{w} \in W$, τότε για κάποια $a, b \in R$ είναι $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, οπότε $-\mathbf{w} = (-a)\mathbf{u} + (-b)\mathbf{v} \in W$. Οι υπόλοιποι νόμοι (V1), (V2) και (V5)-(V8) αυτόματα ικανοποιούνται αφού αφορούν σε ιδιότητες των πράξεων μεταξύ στοιχείων του $\mathbb{R}^3$, ή του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{R}^3$ και $W \subset \mathbb{R}^3$. Έτσι η δομή $(W, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Από το Παράδειγμα 5.6 εξάγονται μερικά σημαντικά συμπεράσματα:

- (Σ1) Ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου μπορεί να είναι διανυσματικός χώρος με πράξεις τον περιορισμό των πράξεων του αρχικού χώρου στο υποσύνολο.
- (Σ2) Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών κάποιας συλλογής διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου με πράξεις τον περιορισμό των πράξεων του αρχικού χώρου έχει τη δομή διανυσματικού χώρου.

Ορισμός (5.3)

Εάν ο X είναι διανυσματικός χώρος και $W \subseteq X$, θα λέμε ότι ο W είναι **διανυσματικός υπόχωρος** (vector subspace) ή απλά **υπόχωρος** του X εάν ο περιορισμός των πράξεων του X στο W προσδίδει στο W τη δομή διανυσματικού χώρου.

Θεώρημα (5.4)

Εάν ο X είναι διανυσματικός χώρος και $W \subseteq X$, ο W είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν για κάθε $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ στο W και για κάθε λ και μ στο $\mathbb{R}$ το $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$ είναι στοιχείο του W.

Ορισμός (5.4)

Εάν ο X είναι διανυσματικός χώρος και $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του X, το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{u}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ συμβολίζουμε με $\mathrm{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, έτσι

$$\mathrm{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n,\ c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

και ονομάζουμε **διάνοιγμα** (span) των $\mathbf{u}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Αν $S \subseteq X$ με $\mathrm{span}(S)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του S.

Θεώρημα (5.5)

Έστω ότι $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του διανυσματικού χώρου X, τότε

1. *Το $\mathrm{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ είναι υπόχωρος του X.*
2. *Εάν W είναι υπόχωρος του X και $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subseteq W$, τότε το διάνοιγμα $\mathrm{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ είναι υπόχωρος του W, δηλαδή ο $\mathrm{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος ο οποίος περιέχει τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$.*

Παράδειγμα (5.7 Η ευθεία ως διανυσματικός υπόχωρος)

Εάν $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$, τότε το $\operatorname{span}\{\mathbf{u}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και αποτελείται απ΄ όλα τα διανύσματα της μορφής $\lambda\mathbf{u}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια είναι η ευθεία που περιέχει το $\mathbf{u}$, ας την πούμε $L_{\mathbf{u}}$. Η $L_{\mathbf{u}}$ μπορεί να παρασταθεί με την **διανυσματική** εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ειδικά στο $\mathbb{R}^2$ αν $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ το διάνυσμα $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ανήκει στον $L_{\mathbf{u}}$ αν και μόνον αν

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_0 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = pt_0 \\ y = qt_0 \end{cases}$$

για κάποιο $t_0 \in \mathbb{R}$, απ΄ όπου έπεται ότι $qx = py$, ή $qx - py = 0$. **Συμπέρασμα:** οι ευθείες που είναι υπόχωροι στο $\mathbb{R}^2$ έχουν **αλγεβρική** εξίσωση $ax + by = 0$. Σημειώνουμε ότι μια ευθεία με εξίσωση $ax + by + c = 0$, με $c \neq 0$, δεν μπορεί να είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ γιατί δεν περιέχει το διάνυσμα $\mathbf{0}$.