ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 4

Επίλυση γραμμικών συστημάτων - Απαλοιφή

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

24 Οκτωβρίου 2022

1. Επίλυση γραμμικών συστημάτων, απαλοιφή

Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος έγκειται στην μετατροπή του σε ένα **ισοδύναμο** σύστημα (που έχει δηλαδή την ίδια λύση) το οποίο είναι ευκολώτερο να λυθεί. Για παράδειγμα για το ``τριγωνικό'' σύστημα

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 3 \\ y + z &= 3 \\ 3z &= 6 \end{aligned} \tag{1}$$

η λύση προκύπτει αμέσως αφού με την ``προς τα πίσω αντικατάσταση'' έχουμε

- (α΄) Από την 3η εξίσωση: $z = 2$
- (β΄) Από την 2η εξίσωση: $y = 3 - z = 3 - 2 = 1$ και τέλος
- (γ΄) Από την 1η εξίσωση: $x = 3 - 3y + 2z = 3 - 3 + 4 = 4$.

Κατά συνέπεια αν δοθεί ένα σύστημα προσπαθούμε διαμορφώνοντας μια ακολουθία από ισοδύναμα συστήματα να καταλήξουμε σε ένα τριγωνικό σύστημα. Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα αν το ένα προκύπτει από το άλλο εκτελώντας τις πράξεις:

1. Πολλαπλασιασμός μιας εξίσωσης με μια μη μηδενική σταθερά.
2. Μετάθεση δύο εξισώσεων.
3. Πρόσθεση ενός πολλαπλασίου μιας εξίσωσης σε άλλη εξίσωση.

Πράγματι αν $x_0 = 4$, $y_0 = 1$, $z_0 = 2$ είναι η λύση του (1) και με E_1, E_2, E_3 παραστήσουμε τις εξισώσεις του (1), τότε το σύστημα που προκύπτει αντικαθιστώντας, για παράδειγμα, την πρώτη εξίσωση E_1 με την $3E_1$, την δεύτερη εξίσωση E_2 με το άθροισμα $2E_1 + E_2$, και την τρίτη E_3 με το άθροισμα $3E_1 + E_3$ προκύπτει ένα σύστημα του οποίου η λύση παραμένει η (x_0, y_0, z_0) αφού

$$\begin{aligned} 3x_0 + 9y_0 - 6z_0 &= 9 \\ 2x_0 + 7y_0 - 3z_0 &= 9 \\ 3x_0 + 9y_0 - 3z_0 &= 15 \end{aligned} \tag{2}$$

Σημειώνουμε ότι με την τρίτη πράξη επιτυγχάνεται η απαλοιφή κάποιου επιλεγμένου αγνώστου. Ας δούμε λοιπόν σε ένα παράδειγμα όπου εκτελώντας αυτές τις πράξεις σε διαδοχικά βήματα καταλήγουμε σε ένα ισοδύναμο τριγωνικό σύστημα. Εργαζόμενοι σε διπλό ταμπλώ αποτυπώνουμε όλα τα βήματα αυτού του μετασχηματισμού και στα αντίστοιχα μητρώα.

Παράδειγμα (4.1)

Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+3y-2z+w &= -1 \\ 2x+y+z+4w &= -3 \\ -x+2y+z+6w &= -4 \end{aligned}$$

Γράφουμε το αρχικό σύστημα καθώς και το αντίστοιχο μητρώο

$$\begin{aligned} x+3y-2z+w &= -1 \\ 2x+y+z+4w &= -3 \\ -x+2y+z+6w &= -4 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Αντικαθιστούμε την δεύτερη εξίσωση με αυτή που προκύπτει αν προσθέσουμε στη δεύτερη την -2 επί την πρώτη εξίσωση, την πράξη αυτή τη δηλώνουμε ως

$$E_2 \to (-2)E_1 + E_2$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\begin{aligned} x+3y-2z+w&=-1\\ -5y+5z+2w&=-1\\ -x+2y+z+6w&=-4 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1\\ 0 & -5 & 5 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Αντικαθιστούμε την E_3 με την $1E_1+E_3$

$$\begin{aligned} x+3y-2z+w&=-1\\ -5y+5z+2w&=-1\\ 5y-z+7w&=-5 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1\\ 0 & -5 & 5 & 2 & -1\\ 0 & 5 & -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Αντικαθιστούμε την E_3 με την $1E_2+E_3$

$$\begin{aligned} x+3y-2z+w&=-1\\ -5y+5z+2w&=-1\\ 4z+9w&=-6 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1\\ 0 & -5 & 5 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία ``τριγωνοποίησης'' του συστήματος τερματίζεται (γιατί;), επομένως με προς τα πίσω αντικατάσταση βρίσκουμε

$$\left.\begin{aligned} z &= -\frac{3}{2} - \frac{9}{4}w \\ y &= \frac{1}{5} + z + \frac{2}{5}w \\ x &= -1 - 3y + 2z - w \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} w = t \\ z = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{4}t \\ y = -\dfrac{13}{10} - \dfrac{37}{20}t \\ x = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{20}t \end{cases}$$

όπου $t \in \mathbb{R}$, κατά συνέπεια το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Παρατηρούμε ότι θα μπορούσαμε να πάρουμε τη λύση του συστήματος εκτελώντας τις πράξεις, που περιγράψαμε στη διαδικασία της επίλυσης, όχι στις εξισώσεις του συστήματος αλλά απευθείας στις γραμμές του μητρώου. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε από το αρχικό να πάμε στο δεύτερο μητρώο στο οποίο η δεύτερη γραμμή αντικαθίσταται από το άθροισμα (διανυσματικό) του πολλαπλασίου της πρώτης γραμμής επί -2 και της δεύτερης γραμμής, σχηματικά

$$r_2 \to -2r_1 + r_2,$$

όπου με r_i δηλώνουμε την i γραμμή (row) του μητρώου. Όμοια για οικονομία στα βήματα μπορούμε να πάμε από το αρχικό στο τρίτο, στη διαδικασία επίλυσης, μητρώο με τις πράξεις

$$r_2 \to -2r_1 + r_2, \qquad \text{και} \qquad r_3 \to r_1 + r_3$$

και στη συνέχεια με την πράξη

$$r_3 \to r_2 + r_3$$

να καταλήξουμε στο τελευταίο μητρώο. Τη διαδικασία αυτή τη δηλώνουμε με

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Σε αντιστοιχία με τις πράξεις που διατηρούν την ισοδυναμία συστημάτων ορίζουμε τις **στοιχειώδεις πράξεις γραμμών** σε μητρώα να είναι

1. Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με μια μη μηδενική σταθερά.
2. Μετάθεση δύο γραμμών.
3. Πρόσθεση ενός πολλαπλασίου μιας γραμμής σε άλλη γραμμή.

Παρατηρώντας το τελευταίο μητρώο στην ακολουθία απλοποίησης, δηλαδή στη **διαδικασία της απαλοιφής**, βλέπουμε ότι εφαρμόζοντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μπορούμε να πάρουμε ακόμα ``απλούστερο'' μητρώο που λογικά αντιστοιχεί σε απλούστερο τελικό σύστημα, για παράδειγμα πολαπλασιάζοντας την δεύτερη γραμμή με $-1/5$ και την τρίτη με $1/4$ παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 9/4 & -3/2 \end{pmatrix}$$

και συνεχίζοντας (με την πράξη $r_1 \to r_1 - 3r_2$) βρίσκουμε διαδοχικά

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 11/5 & -8/5 \\ 0 & 1 & -1 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 9/4 & -3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 + r_3]{r_1 \to r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/20 & -1/10 \\ 0 & 1 & 0 & 37/20 & -13/10 \\ 0 & 0 & 1 & 9/4 & -3/2 \end{pmatrix}$$

απ΄ όπου διαβάζουμε τη λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} x - \frac{1}{20}w &= -\frac{1}{10} \\ y + \frac{37}{20}w &= -\frac{13}{10} \\ z + \frac{9}{4}w &= -\frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -\frac{1}{10} + \frac{1}{20}t \\ y &= -\frac{13}{10} - \frac{37}{20}t \\ z &= -\frac{3}{2} - \frac{9}{4}t \\ w &= t \end{aligned}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα (4.2)

Δείξτε ότι το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= a \\
x - z &= b \\
2x + y + z &= c
\end{aligned}
$$

όπου a, b, c είναι πραγματικές παράμετροι, έχει λύση αν και μόνο αν $c = a + b$.

Με τη διαδικασία της απαλοιφής βρίσκουμε

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -3 & b-a \\ 0 & -1 & -3 & c-2a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -3 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{pmatrix}.
$$

Η τρίτη εξίσωση του συστήματος που αντιστοιχεί στο τελευταίο μητρώο είναι $0x + 0y + 0z = c - a - b$ κατά συνέπεια το σύστημα έχει λύση, είναι **συμβατό** όπως λέμε, αν και μόνο αν $c = a + b$.

Άσκηση (4.1)

Για το σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+2z &= a \\ 2x+3y+3z &= b \\ x+2y+\mu z &= c \end{aligned}$$

όπου a, b, c, μ είναι πραγματικές παράμετροι, βρείτε σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων ώστε το σύστημα να έχει
(i) μοναδική λύση,
(ii) άπειρες λύσεις,
(iii) καμία λύση (**αδύνατο**).

Το σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+2z&=3\\ 3x-y-z&=2\\ 2x+y+z&=4 \end{aligned}$$

γράφεται ως

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 4\end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση (4.1 Θεμελιώδης για την ύπαρξη λύσης συστήματος)

Αν για το σύστημα $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ με $\mathbf{a}_j$, $j=1,2,\dots,m$ γράψουμε τις στήλες του A, τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την γραμμική εξίσωση

$$\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_mx_m=\mathbf{b},$$

κατά συνέπεια: *Το σύστημα $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ έχει λύση αν και μόνον αν το $\mathbf{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.*

2. Η γεωμετρική προσέγγιση

Ας θεωρήσουμε ένα απλό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους,

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{c}$$

Κάθε εξίσωση παριστάνει μια ευθεία στο επίπεδο, κατά συνέπεια οι δύο ευθείες είτε είναι παράλληλες, είτε τέμνονται σε ένα σημείο, είτε τέμνονται σε περισσότερα του ενός σημεία, δηλαδή ταυτίζονται. Έτσι λοιπόν το σύστημα είτε δεν έχει λύση, είτε έχει μοναδική λύση, είτε έχει άπειρες λύσεις.

Θεωρώντας τη διανυσματική μορφή διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- (α΄) Τα διανύσματα **a**, **b** δεν περιέχονται στην ίδια ευθεία, ισοδύναμα $\mathbf{b} \neq \lambda \mathbf{a}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι όπως λέμε **γραμμικά ανεξάρτητα**. Τότε το διάνυσμα **c** εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των **a** και **b**. Έτσι το αρχικό σύστημα έχει **μοναδική λύση**.
- (β΄) Τα διανύσματα **a**, **b** περιέχονται στην ίδια ευθεία, ισοδύναμα $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι όπως λέμε **γραμμικά εξαρτημένα**. Τότε η διανυσματική εξίσωση γίνεται

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (x + \lambda y) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Στην δεύτερη περίπτωση θα έχουμε, ισοδύναμα,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

όπου $z = x + \lambda y$, οπότε διακρίνουμε τις δύο υποπεριπτώσεις

- (β1) Το διάνυσμα $\mathbf{c}$ δεν περιέχεται στην ευθεία που ορίζει το $\mathbf{a}$, ισοδύναμα $\mathbf{c} \neq t\mathbf{a}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, κατά συνέπεια το σύστημα δεν έχει λύση.
- (β2) Το διάνυσμα $\mathbf{c}$ περιέχεται στην ευθεία που ορίζει το $\mathbf{a}$, ισοδύναμα

$$\mathbf{c} = \mu\mathbf{a} \Leftrightarrow z = x + \lambda y = \mu.$$

Τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η

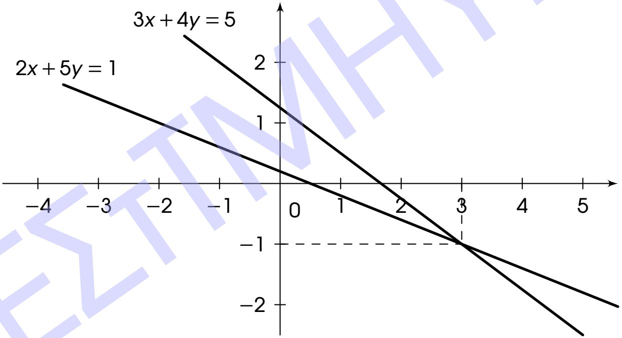
$$x = \mu - \lambda t, \qquad y = t$$

είναι λύση του συστήματος, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα (4.3) Ας επιλύσουμε γραφικά το απλό σύστημα,

$$\begin{aligned} 3x+4y&=5 \\ 2x+5y&=1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}.$$

Θεώρηση κατά γραμμές: Οι ευθείες έχουν διαφορετικές κλίσεις κατά συνέπεια τέμνονται σε ένα σημείο. Πράγματι στο Σχήμα 1 αποτυπώνεται αυτό το αποτέλεσμα και η λύση του συστήματος είναι η $x=3$, $y=-1$.



Σχήμα: Γραφική επίλυση συστήματος - Θεώρηση κατά γραμμές.

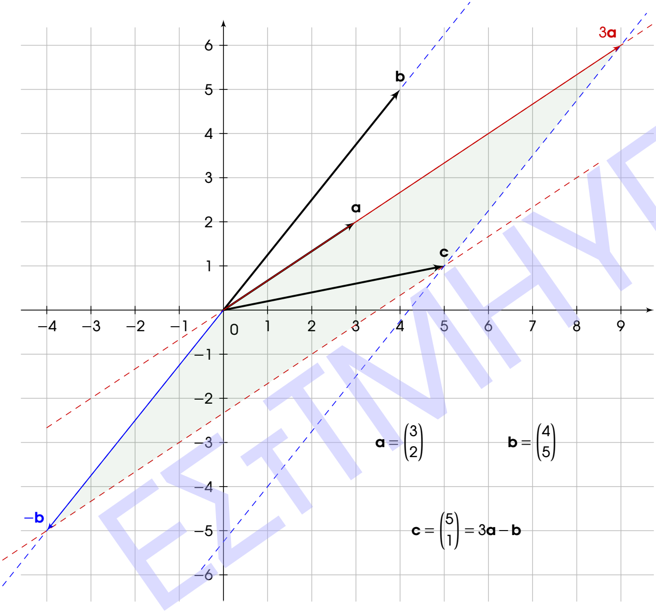
Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 5 \\ 2x + 5y &= 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Θεώρηση κατά στήλες: Τα διανύσματα των συντελεστών είναι γραμμικά ανεξάρτητα,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, επομένως το διάνυσμα των σταθερών του συστήματος εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των δυανυσμάτων των συντελεστών. Οι ευθείες που περιέχουν αντίστοιχα τα διανύσματα **a** και **b** και οι παράλληλες προς αυτές από το σημείο (c_1, c_2) ορίζουν μοναδικό παραλληλόγραμμο με διαγώνιο το ``διάνυσμα'' **c**, βλέπε Σχήμα 2.



Σχήμα: Γραφική επίλυση συστήματος - Θεώρηση κατά στήλες.

3. Η απαλοιφή Gauss και Gauss-Jordan

Ξεκινώντας από ένα τυχαίο επαυξημένο μητρώο, το οποίο αντιστοιχεί σε κάποιο τυπικό σύστημα, ας πούμε για παράδειγμα, τεσσάρων εξισώσεων με έξι αγνώστους (4×6) μπορεί με τη διαδικασία της απαλοιφής να καταλήξουμε στο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

το οποίο δεν είναι μεν τριγωνικό, αλλά έχει τη συγκεκριμένη κλιμακωτή μορφή (σε αναλογία με τη γραφική παράσταση μιας φθίνουσας κλιμακωτής συνάρτησης).

Ορισμός (4.1)

Θα λέμε ότι ένα μητρώο είναι σε **κλιμακωτή μορφή** (row-echelon form) αν έχει τις ιδιότητες

1. Εάν μια γραμμή δεν αποτελείται εξ ολοκλήρου από μηδενικά, τότε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο στη γραμμή είναι το 1. Αυτό το 1 ονομάζουμε **οδηγό**.
2. Οι γραμμές που αποτελούνται εξ ολοκλήρου από μηδενικά είναι και οι τελευταίες γραμμές του μητώου.
3. Αν δύο διαδοχικές γραμμές περιέχουν οδηγούς, τότε ο οδηγός της επάνω γραμμής βρίσκεται στα αριστερά του οδηγού της κάτω γραμμής.

Θα λέμε ότι ένα μητρώο είναι σε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** (ΑΚΜ) (reduced row-echelon form) αν επιπλέον των (1)–(3) έχει την ιδιότητα

4. Εάν μια στήλη περιέχει οδηγό, τότε περιέχει μηδενικά στις υπόλοιπες θέσεις.

Παρατηρούμε ότι το μητρώο στην (3) είναι σε κλιμακωτή μορφή αλλά δεν είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, αφού πάνω από τον οδηγό στην τρίτη γραμμή περιέχονται μη μηδενικά στοιχεία. Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών

$$r_1 \to -2r_3 + r_1 \qquad \text{και} \qquad r_2 \to -1r_3 + r_2$$

οδηγούν στο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

το οποίο είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, με τους οδηγούς κυκλωμένους. Τη διαδικασία που οδηγεί σε μια κλιμακωτή μορφή ονομάζουμε **απαλοιφή Gauss**, ενώ εκείνη που οδηγεί στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ονομάζουμε **απαλοιφή Gauss-Jordan**.

Παράδειγμα (4.4)

Να βρεθεί μια κλιμακωτή μορφή για το μητρώο

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix}.$$

Βήμα 1. Εντοπίζουμε την αριστερότερη στήλη η οποία περιέχει μη μηδενικά στοιχεία. Εδώ είναι η πρώτη στήλη.

Βήμα 2. Αντικαθιστούμε την πρώτη γραμμή, αν είναι απαραίτητο, με άλλη γραμμή η οποία περιέχει μη μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού. Εδώ μεταθέτουμε την πρώτη με την δεύτερη γραμμή.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με κατάλληλη σταθερά ώστε να εμφανιστεί ο οδηγός της πρώτης γραμμής. Εδώ πολλαπλασιάζουμε με $1/2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix}$$

Βήμα 4. Προσθέτουμε κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής στις αποκάτω γραμμές ώστε τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό να είναι μηδενικά. Εδώ πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix}$$

Βήμα 5. Καλύπτουμε την πρώτη γραμμή και επαναλαμβάνουμε τα Βήματα 1–4 στο υπομητρώο που απομένει. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρις ότου καταλήξουμε στην row-echleon form του αρχικού μητρώου.

Βήμα 3α. Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με κατάλληλη σταθερά ώστε να εμφανιστεί ο οδηγός της δεύτερης γραμμής. Εδώ με $-1/2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix}$$

Βήμα 4α. Προσθέτουμε κατάλληλα πολλαπλάσια της δεύτερης γραμμής στις αποκάτω γραμμές ώστε τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό να μηδενιστούν. Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -3 και την προσθέτουμε στην τρίτη.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 39 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3β. Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με κατάλληλη σταθερά ώστε να εμφανιστεί ο οδηγός της τρίτης γραμμής. Εδώ πολλαπλασιάζουμε με $-1/6$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13/2 \end{pmatrix}$$

Το τελευταίο μητρώο είναι η ζητούμενη μορφή.

Σημειώνουμε ότι η κλιμακωτή μορφή μητρώου δεν είναι μοναδική.

΄Ασκηση (4.2)

Επαναλάβατε και ολοκληρώστε την διαδικασία απαλοιφής στο μητρώο του τελευταίου Παραδείγματος όπου τώρα στο Βήμα 2 μεταθέστε την πρώτη και την τρίτη γραμμή. Τι παρατηρείτε;

Παράδειγμα (4.5)

Να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή για το μητρώο

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix}.$$

Στο προηγούμενο Παράδειγμα βρήκαμε μια κλιμακωτή μορφή του μητρώου

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13/2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

και από αυτήν συνεχίζουμε τη διαδικασία Gauss-Jordan με

Βήμα 6. Αρχίζοντας από την τελευταία μη μηδενική γραμμή και ανεβαίνοντας προσθέτουμε κατάλληλα πολλαπλάσια κάθε γραμμής με οδηγό στις αποπάνω γραμμές ώστε τα στοιχεία πάνω από κάθε οδηγό να είναι μηδενικά.

Βήμα 6α. Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με 4 και την προσθέτουμε στην δεύτερη.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13/2 \end{pmatrix}$$

Βήμα 6β. Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με -6 και την προσθέτουμε στην πρώτη.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 & 53 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13/2 \end{pmatrix}$$

Βήμα 6γ. Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με 4 και την προσθέτουμε στην πρώτη.

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -75 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13/2 \end{pmatrix}$$

Το τελευταίο μητρώο είναι η ζητούμενη ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Σημειώνουμε, και αυτό μπορεί να αποδειχθεί, ότι σε αντίθεση με την κλιμακωτή μορφή μητρώου η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή (ΑΚΜ) **είναι μοναδική**.

Παρατήρηση (4.2)

Για ένα γραμμικό ομοιογενές σύστημα, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, n εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους στην καλύτερη περίπτωση, δηλαδή αυτή στην οποία υπάρχουν n οδηγοί, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R_0 του επαυξημένου μητρώου είναι

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad n \times (n+2)$$

απ' όπου φαίνεται ότι υπάρχουν άπειρες το πλήθος μη μηδενικές λύσεις.

4. Στοιχειώδη μητρώα

Κάθε βήμα στην διαδικασία της απαλοιφής μπορεί να επιτευχθεί πολλαπλασιάζοντας το αρχικό μητρώο με ένα κατάλληλο μητρώο. Σε αντιστοιχία με τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάθε τέτοιο μητρώο ονομάζεται **στοιχειώδες μητρώο**.

Ορισμός (4.2)

Κάθε τετραγωνικό μητρώο το οποίο προκύπτει από το μοναδιαίο μητρώο I εκτελώντας μία μόνο στοιχειώδη πράξη γραμμών λέγεται **στοιχειώδες μητρώο**, ή μητρώο Gauss.

Παράδειγμα (4.6)

Τα παρακάτω μητρώα είναι στοιχειώδη.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; J_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ειδικά το μητρώο J_2 είναι ένα μητρώο μετάθεσης το οποίο προέρχεται από το I με μία μόνο εναλλαγή γραμμών, ενώ το μητρώο J_3 προκύπτει αν στη δεύτερη γραμμή του I προστεθεί το τριπλάσιο της πρώτης γραμμής.

Αν το στοιχειώδες μητρώο E προέρχεται από το I εκτελώντας μια στοιχειώδη πράξη γραμμών και E' είναι το στοιχειώδες μητρώο το οποίο προέρχεται από το I εκτελώντας την αντίστροφη στοιχειώδη πράξη γραμμών, τότε $E^{-1} = E'$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{matrix} r_1 \to r_1 \\ r_2 \to 2r_2 \end{matrix} \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} = J_1$$

και

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{matrix} r_1 \to r_1 \\ r_2 \to \frac{1}{2}r_2 \end{matrix} \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix} = J_1'$$

για το οποίο ισχύει

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Όμοια

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{matrix} r_1 \to r_1 + 2r_2 \\ r_2 \to r_2 \end{matrix} \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix} = J_5$$

και

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{matrix} r_1 \to r_1 - 2r_2 \\ r_2 \to r_2 \end{matrix} \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix} = J_5'$$

και τα δύο μητρώα είναι το ένα αντίστροφο του άλλου αφού $J_5' J_5 = J_5 J_5' = I$.

Αν με r_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ συμβολίσουμε τις γραμμές ενός μητρώου A, τότε η πράξη

$$r_k \to r_k' = r_k + \lambda r_j \to r_k'' = r_k' - \lambda r_j = r_k + \lambda r_j - \lambda r_j = r_k$$

υλοποιείται μέσω δύο κατάλληλων μητρώων, το ένα αντίστροφο του άλλου. Για παράδειγμα η πράξη $r_3 \to r_3 + \lambda r_2$, για A ένα $4 \times m$ μητρώο, επιτυγχάνεται με τον πολλαπλασιασμό με το στοιχειώδες μητρώο $E(\lambda)$

$$E(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + \lambda r_2 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

και

$$E(-\lambda)E(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + \lambda r_2 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ (r_3 + \lambda r_2) - \lambda r_2 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = A.$$

Αναλυτικά γράφοντας το στοιχειώδες μητρώο $E(-\lambda)$ ως

$$E(-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I - \lambda N,$$

όπου I είναι το 4×4 ταυτοτικό μητρώο και N το μητρώο δεξιά του λ, τότε όντως

$$E(-\lambda)E(\lambda) = \left(I - \lambda N\right)\left(I + \lambda N\right) = I + \lambda N - \lambda N + \lambda N - \lambda^2 N^2 = I,$$

αφού όπως εύκολα διαπιστώνεται $N^2 = O$.

Επίσης αν με M_{ij} συμβολίσουμε το μητρώο μετάθεσης που εναλλάσσει τις γραμμές i και j του I, τότε $M_{ij}^{-1} = M_{ji} = M_{ij}$, πράγματι για το J_2 έχουμε

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Διατυπώνουμε λοιπόν χωρίς αυστηρή απόδειξη, αλλά χωρίς φόβο και πάθος, το

Θεώρημα (4.1)

Κάθε στοιχειώδες μητρώο E είναι αντιστρέψιμο και το E^{-1} είναι επίσης στοιχειώδες μητρώο.

Παράδειγμα (4.7)

Δείχνουμε πώς καταλήγουμε στην κλιμακωτή μορφή, έστω R, για το μητρώο A του Παραδείγματος (3/Δ6) κάνοντας χρήση των στοιχειωδών μητρώων που αντιστοιχούν στο κάθε βήμα της απαλοιφής Gauss.

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = A_1$$

$$E_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = A_2$$

$$E_3 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = A_3$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$E_4A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = A_4$$

$$E_5A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 39 \end{pmatrix} = A_5$$

$$E_6A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13/2 \end{pmatrix} = R.$$

Παρατήρηση (4.3 Σημαντική)

Στο Παράδειγμα (4.6) δείξαμε ότι

$$E_6(E_5(E_4(E_3(E_2(E_1A))))) = R$$

όπου με R συμβολίσαμε μια κλιμακωτή μορφή του αρχικού μητρώου, κατά συνέπεια

$$A = LR \tag{5}$$

όπου $L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}$.

Θα λέμε ότι δύο μητρώα $n \times m$ είναι **γραμμοϊσοδύναμα** (row equivelent) εάν το ένα προκύπτει από το άλλο με με την διαδοχική εφαρμογή ενός πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων γραμμών. Επειδή για κάθε στοιχειώδες μητρώο L_k το L_k^{-1} είναι επίσης στοιχειώδες η σχέση (5) εκφράζει ακριβώς ότι κάθε μητρώο είναι γραμμοϊσοδύναμο με κάθε κλιμακωτή μορφή του, και κατ΄ επέκταση γραμμοϊσοδύναμο με την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του. Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε την κλιμακωτή μορφή μητρώου με R και την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή με R_0.