ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος

CEID

Διάλεξη 4

6 Μαρτίου 2018

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση I

Υπενθύμιση της 3ης δ.

- Εσωτερικό γινόμενο: Καθετότητα, γωνία μεταξύ διανυσμάτων, ιδιότητες.
- Σχέσεις: Ανισότητα CBS, τριγωνική ανισότητα, κανόνας παραλληλογράμμου, ταυτότητα Πυθαγόρα.
- Πολλαπλασιασμός μητρώων μέσω εσωτερικών γινομένων.
- Συμβολισμός επλογής υπομητρώων από μητρώο.
- Κόστος βασικών πράξεων: Εσωτερικό γινόμενο, πολλ. μητρώου με διάνυσμα και μητρώου με μητρώο.
- Δυνάμεις και πολυώνυμα μητρώου. Αντίστροφο μητρώου.
- Ανάκτηση πληροφορίας από μητρώο.
- Μητρώα και γραφήματα
- Μέτρηση διαδρομών με δυνάμεις και δυναμοσειρές μητρώων.
- Αντίστροφο μητρώου.
- Περιπτώσεις εύκολης αντιστροφής ή διάγνωσης μη αντιστρεψιμότητας.
- Ορθογώνια μητρώα.

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση II

Σήμερα (όροι 4ης δ.):

- Επίλυση γραμμικών συστημάτων: Εισαγωγή.
- Γεωμετρική ερμηνεία επίλυσης γραμμικού συστήματος: ερμηνεία κατά γραμμές, ερμηνεία κατά στήλες.
- Διαμέριση μητρώων, υπομητρώα, σύνθετα μητρώα: Συμβολισμοι και πράξεις.
- Ερμηνείες πολλαπλασιασμού μητρώων με χρήση σύνθετων μητρώων.
- Αντίστροφο κατά πλοκάδες (μπλοκ) τριγωνικού μητρώου.
- Επίλυση γραμμικού συστήματος με απαλοιφή Gauss και πίσω αντικατάσταση (επίλυση του ισοδύναμου άνω τριγωνικού συστήματος).

Υπό συζήτηση ενότητες

Υπενθύμιση

Είδαμε ότι στο λογισμό μητρώων μπορεί $AB = 0$ ενώ $A \neq 0$ και $B \neq 0$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = 0$$

Ενδιαφέρον: Θα δούμε ότι αν $AB = 0$ και $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (τετραγωνικά) τότε τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι ιδιόμορφο

Στο λογισμό μητρώων, τα ιδιόμορφα μητρώα έχουν το ρόλο του μηδεν!

- Αν A ιδιόμορφο, τότε BA και AB είναι ιδιόμορφα για οποιοδήποτε B.
- Προσοχή: Ιδιόμορφο δεν σημαίνει 0, απλά ε έχει το ρόλο ιδεατού μηδενικού: Ό,τι πολλαπλασιάσει, το κάνει ιδιόμορφο.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+2\gamma & \beta+2\delta \\ 2\alpha+4\gamma & 2\beta+4\delta \end{pmatrix},$$

και προσέξτε οτι οι στήλες (και οι γραμμές) του γινομένου είναι γραμμικά εξαρτημένες ό,τι και να είναι τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Ελέγξτε ότι για να υπάρχει $B = A^{-1}$ θα πρέπει $AB = I$.
Για να υπάρχει τέτοιο B θα πρέπει η πρώτη στήλη του $B(:,1)$ που μπορούμε χάριν οικονομίας να τη συμβολίσουμε ως $b_1 = [\beta_{11}, \beta_{21}]^\top$ να ικανοποιεί

$$Ab_1 = e_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

επομένως

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\beta_2 &= 1 \\ 2\beta_1 + 4\beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

που είναι αδύνατο γιατί τότε

$$2(\beta_1 + 2\beta_2) - (2\beta_1 + 4\beta_2) = 2 - 0 \Rightarrow 2 = 0$$

Τύπος αντιστρόφου

Strang, σελ. 90

Το αντίστροφο του 2×2 μητρώου:

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Επομένως το μητρώο είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Όπως θα μάθουμε, αυτή είναι η ορίζουσα του A.

Προσοχή: Αυτή είναι από τις λίγες περιπτώσεις που το αντίστροφο μητρώο υπολογίζεται εύκολα.

ΠΡΟΣΟΧΗ (1): Σχεδόν ποτέ δεν χρησιμοποιούμε αντιστροφή για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα.

ΠΡΟΣΟΧΗ (2): Ο υπολογισμός του αντιστρόφου χρειάζεται πολύ πιο σπάνια από το να λύσουμε γραμμικά συστήματα.

Περιπτώσεις που το αντίστροφο είναι εύκολο να βρεθεί ή να δειχτεί ότι δεν είναι αντιστρέψιμο

διαγώνιο μητρώο

στοιχειώδης μετασχηματισμός Gauss

ορθογώνιο

2×2

κατά πλοκάδες διαγώνιο αν γνωρίζουμε τα αντίστροφα των πλοκάδων

Δεν υπάρχει

μηδενικό μητρώο

διαγώνιο ή τριγωνικό με κάποιο διαγώνιο στοιχείο 0

μητρώο με γραμμικά εξαρτημένες στήλες ή γραμμές

2×2 με μηδενική ορίζουσα

κατά πλοκάδες διαγώνιο ή τριγωνικό αν κάποια διαγώνια πλοκάδα είναι μη αντιστρέψιμη

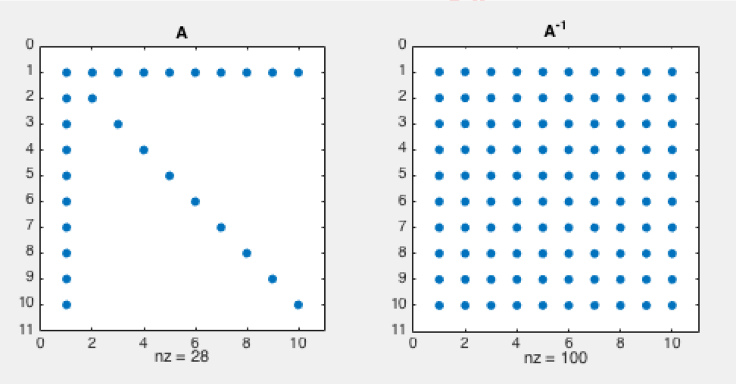
γινόμενο μητρώων από τα οποία ένα μη αντιστρέψιμο

ΠΡΟΣΟΧΗ - Εμπεδώστε ότι:

- Ο υπολογισμός του αντιστρόφου είναι συνήθως αρκετά πιο ακριβός σε πράξεις από την λύση ενός γραμμικού συστήματος (κατά σταθερό παράγοντα, όχι ασυμπτωτικά)

ΠΡΟΣΟΧΗ - Εμπεδώστε ότι:

- Ο υπολογισμός του αντιστρόφου είναι συνήθως αρκετά πιο ακριβός σε πράξεις από την λύση ενός γραμμικού συστήματος (κατά σταθερό παράγοντα, όχι ασυμπτωτικά)
- η ακρίβεια αφορά και στην αποθήκευση του αντιστρόφου, π.χ.



ΠΡΟΣΟΧΗ - Εμπεδώστε ότι:

- Ο υπολογισμός του αντιστρόφου είναι συνήθως αρκετά πιο ακριβός σε πράξεις από την λύση ενός γραμμικού συστήματος (κατά σταθερό παράγοντα, όχι ασυμπτωτικά)
- η ακρίβεια αφορά και στην αποθήκευση του αντιστρόφου, π.χ.
- η αντιστροφή συνήθως υλοποιείται με επίλυση γραμμικών συστημάτων ισάριθμων με το μέγεθος του μητρώου,

ΠΡΟΣΟΧΗ - Εμπεδώστε ότι:

- Ο υπολογισμός του αντιστρόφου είναι συνήθως αρκετά πιο ακριβός σε πράξεις από την λύση ενός γραμμικού συστήματος (κατά σταθερό παράγοντα, όχι ασυμπτωτικά)
- η ακρίβεια αφορά και στην αποθήκευση του αντιστρόφου, π.χ.
- η αντιστροφή συνήθως υλοποιείται με επίλυση γραμμικών συστημάτων ισάριθμων με το μέγεθος του μητρώου,
- σχεδόν ποτέ δεν χρησιμοποιούμε αντιστροφή για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα,

ΠΡΟΣΟΧΗ - Εμπεδώστε ότι:

- Ο υπολογισμός του αντιστρόφου είναι συνήθως αρκετά πιο ακριβός σε πράξεις από την λύση ενός γραμμικού συστήματος (κατά σταθερό παράγοντα, όχι ασυμπτωτικά)
- η ακρίβεια αφορά και στην αποθήκευση του αντιστρόφου, π.χ.
- η αντιστροφή συνήθως υλοποιείται με επίλυση γραμμικών συστημάτων ισάριθμων με το μέγεθος του μητρώου,
- σχεδόν ποτέ δεν χρησιμοποιούμε αντιστροφή για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα,
- ακόμα και όταν γράφουμε $A^{-1}b$, συνήθως εννοούμε την εύρεση του x ώστε $Ax = b$.

Αναζήτηση αντιστρόφου

αν υπάρχει

Θα το αναζητήσουμε λύνοντας μία σειρά από υποπροβλήματα (που εντέλει είναι πιο σημαντικό)!
Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ζητούμε το $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε

$$AB = I \Leftrightarrow A[b_1, b_2, \ldots, b_n] = [e_1, e_2, \ldots, e_n], \quad \text{όπου } e_1 = (1, 0, \ldots)^\top, \text{ κ.λπ.}$$

Υπολογίζουμε το B ανά στήλες, δηλ. κάθε διάνυσμα b_j που ικανοποιεί το γραμμικό σύστημα

$$Ab_j = e_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Το επόμενο βασικό ζήτημα είναι η επίλυση γραμμικού συστήματος

Δοθέντων A, b να υπολογιστεί, αν υπάρχει, x τ.ώ. $Ax = b$.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

- Από τα πιο σημαντικά προβλήματα
- Εμφανίζεται σε πολλές εκδοχές και μεταμφιέσεις
- Μία από αυτές είναι ο υπολογισμός του αντιστρόφου μητρώου
- Πολλές μέθοδοι επίλυσης
- Στη σύγχρονη έρευνα αξιοποιούν «δομικές» πληροφορίες από την εφαρμογή για επιτάχυνση
- Εδώ θα εξετάσουμε έναν «πρωταρχικό» τρόπο
- Ονόματα κλειδιά: Απαλοιφή **Gauss**, παραγοντοποίηση *LU*.
- Στόχοι: Να προετοιμαστείτε για την «αυτοματοποίηση» της επίλυσης μέσω αλγορίθμου, που μπορεί να εφαρμοστεί και σε μεγάλα προβλήματα.

Αναμενόμενοι χρόνοι επίλυσης (QSG14)

Table 5.1. Time required to solve a linear system of dimension n by the Cramer rule. "o.r." stands for "out of reach"

	Flops				
n	10^9 (Giga)	10^{10}	10^{11}	10^{12} (Tera)	10^{15} (Peta)
10	10^{-1}sec	10^{-2}sec	10^{-3}sec	10^{-4}sec	negligible
15	17 hours	1.74 hours	10.46 min	1 min	$0.6\ 10^{-1}$ sec
20	4860 years	486 years	48.6 years	4.86 years	1.7 day
25	o.r.	o.r.	o.r.	o.r.	38365 years

Table 5.3. Time required to solve a full linear system of dimension n by MEG. "o.r." stands for "out of reach"

	Flops		
n	10^9 (Giga)	10^{12} (Tera)	10^{15} (Peta)
10^2	$7 \cdot 10^{-4}$sec	negligible	negligible
10^4	11 min	0.7 sec	$7 \cdot 10^{-4}$sec
10^6	21 years	7.7 months	11 min
10^8	o.r.	o.r.	21 years

Προσοχή: Cramer μέσω τύπου Laplace και MEG εννοεί απαλοιφή Gauss - δεν διευκρινίζεται αν εφαρμόζεται οδήγηση.

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

'Μητέρα των προβλημάτων' της Γραμμικής 'Αλγεβρας:

Δίδονται m «γραμμικές εξισώσεις» για n αγνώστους και ζητάμε να υπολογίσουμε τους αγνώστους $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= \beta_1 \\
\alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= \beta_2 \\
\ddots &= \vdots \\
\alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n &= \beta_m
\end{aligned}$$

$$Ax = b \text{ όπου } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε ότι οι βαθμωτοί α_{11} ως α_{44} και β_1 ως β_4 είναι «γνωστές» τιμές που δεν έχουν ακόμα προσδιοριστεί.

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_{11}\xi_1 & +\alpha_{12}\xi_2 & & +\alpha_{14}\xi_4 & = 1 \\
\alpha_{21}\xi_1 & & +\alpha_{23}\xi_3 & & = -500 \\
 & +\alpha_{32}\xi_2 & +\alpha_{33}\xi_3 & & = \frac{1}{43} \\
\alpha_{41}\xi_1 & & & +\alpha_{44}\xi_4 & = 0
\end{array}$$

Αλγεβρική γραφή

Δοθέντων $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$, θέλουμε να βρούμε τη λύση, $x \in \mathbb{R}^n$ του $Ax = b$.

Ύπαρξη Υπάρχει λύση;

Μοναδικότητα Αν υπάρχει, είναι μοναδική;

Εύρεση Ποιά ή ποιές είναι;

Δηλ. θέλουμε να υπολογιστεί το σύνολο

$$\mathcal{X} = \arg_{x\in\mathbb{R}^n}\{Ax = b | A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m\}$$

ή απλά να βρεθεί ένα $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = b$.

Παρατηρήσεις

Με ένα μόνο σύμβολο συνοψίζουμε

- Με A τους mn συντελεστές (γνωστοί)
- Με x το διάνυσμα με τους n αγνώστους,
- Με b το διάνυσμα των m στοιχείων του δεξιού μέλους (γνωστά).

Η σύντομη διατύπωση βασίζεται στην «ειδική» πράξη πολλαπλασιασμού μητρώου με διάνυσμα και επιτυγχάνει εξαιρετική οικονομία στη γραφή.

Στη συνέχεια και μέχρι να δηλωθεί διαφορετικά, θα ασχολούμαστε με τετραγωνικά συστήματα ($m = n$)

Παράδειγμα

$$
\begin{array}{lllll}
\xi_1 & +\xi_2 & & +\xi_4 & = 1 \\
\pi\xi_1 & & +e\xi_3 & & = -500 \\
 & +2.0\xi_2 & -44\xi_3 & & = \frac{1}{43} \\
-\xi_1 & & & +7\xi_4 & = 0
\end{array}
$$

Παράδειγμα

Μη γραμμικό σύστημα!

$$
\begin{array}{lllll}
\sqrt{\xi_1} & +\xi_1\xi_2 & & +\xi_4 & = 1 \\
\pi\xi_1 & & +e^2\xi_3 & & = -500 \\
 & +2.0\xi_2 & -44\xi_3 & & = \frac{1}{43} \\
-\xi_1 & & & +\sqrt{7}\xi_4 & = 0
\end{array}
$$

Η «έφοδος» του Θυμαρίδα (400-350 π.Χ.) (Ιάμβλιχος, 245-325 μ.Χ.)

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \xi_1 & +\cdots & +\xi_n & = & \beta_1 \\ \xi_1 & +\xi_2 & & = & \beta_2 \\ \vdots & & +\ddots & = & \vdots \\ \xi_1 & & +\xi_n & = & \beta_n \end{array}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & & \ddots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{b}$$

Ερμηνεία με γεωμετρία

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $x \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\alpha_{1,1}\xi_1 + \alpha_{1,2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1,n}\xi_n = \beta_n$$

ονομάζεται υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$. Λέγεται επίσης ότι έχει διάσταση $n-1$.

- $n = 1 \Rightarrow$ σημείο στον $\mathbb{R}$.
- $n = 2 \Rightarrow$ ευθεία στον $\mathbb{R}^2$.
- $n = 3 \Rightarrow$ επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.

Θεώρηση γραμμών:

- Κάθε εξίσωση αντιστοιχεί σε ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$
- Η λύση x είναι το σημείο τομής των n υπερεπιπέδων (π.χ. ευθειών όταν $n = 2$).

Θεώρηση στηλών:

- Έστω οι στήλες (διανύσματα) του μητρώου $A = [a_1, \ldots, a_n]$.
- Η λύση x είναι οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού που παράγει το b, δηλ. $\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j = b$.

Προσοχή: ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ; ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ; ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ;

Θεώρηση γραμμών:

- Κάθε εξίσωση αντιστοιχεί σε ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$
- Η λύση x είναι το σημείο τομής των n υπερεπιπέδων (π.χ. ευθειών όταν $n = 2$).

Θεώρηση στηλών:

- Έστω οι στήλες (διανύσματα) του μητρώου $A = [a_1, \ldots, a_n]$.
- Η λύση x είναι οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού που παράγει το b, δηλ. $\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j = b$.

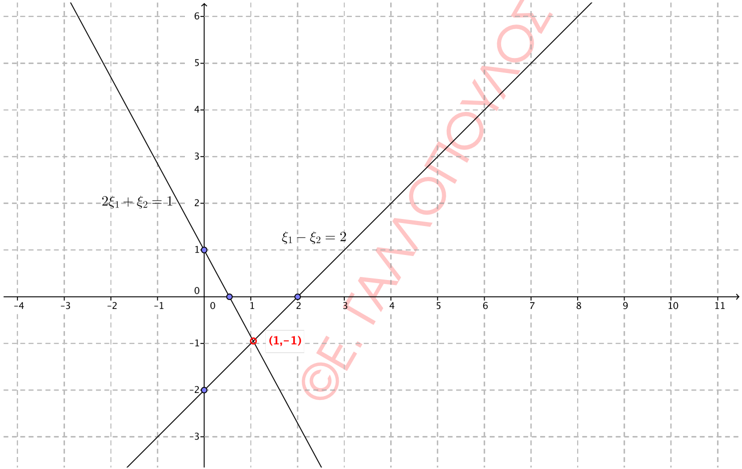
Προσοχή: ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ; ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ; ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ;

Είπε ότι κόκκινες γραμμές είναι **να μην υπάρξουν υφεσιακά μέτρα** και να επιλυθεί ένα σύστημα εξισώσεων με τρεις αγνώστους: πρωτογενές πλεόνασμα σε σχέση με το ποια θα είναι η αναδιάρθρωση του χρέους και επενδύσεις μεγαλύτερες από τις αποταμιεύσεις.

Ερμηνεία λύσης ως σημείο τομής υπερεπιπέδων

Ένα υπερεπίπεδο (γραμμή στον $\mathbb{R}^2$) ανά εξίσωση

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



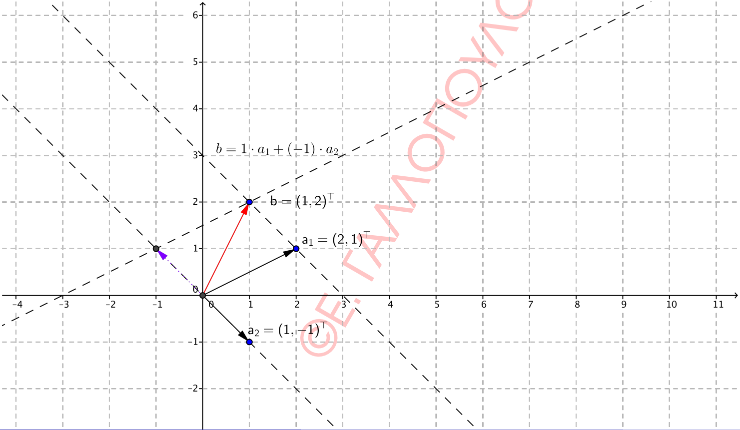
Ερμηνεία λύσης ως πολλαπλασιαστές διανυσμάτων

Ένα διάνυσμα ανά στήλη

Αναζητούμε το γραμμικό συνδυασμό των στηλών του $A = [a_1, a_2]$ που παράγει το b:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ η λύση ικανοποιεί } b = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$$

(Τα ζητούμενα ξ_1, ξ_2 αντιστοιχούν στην κλιμάκωση των a_1, a_2 ώστε $c_1 = \xi_1 a_1$, $c_2 = \xi_2 a_2$ και $b = c_1 + c_2$.)



Δυσχέρειες επίλυσης

όταν $n = 2$ Ερμηνεία γραμμών

- οι εξισώσεις ορίζουν ευθείες που είναι παράλληλες χωρίς κοινό σημείο - ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ
- οι εξισώσεις ορίζουν ευθείες που είναι παράλληλες και έχουν άπειρα κοινά σημεία - ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ερμηνεία στηλών

- οι στήλες του μητρώου είναι στην ίδια ευθεία και το διάνυσμα b ορίζει σημείο εκτός αυτής - ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ
- οι στήλες του μητρώου είναι στην ίδια ευθεία και το διάνυσμα b ορίζει σημείο επ΄ αυτής - ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γενίκευση σε πολλές διαστάσεις

της ερμηνείας γραμμών (δυσκολεύει) Στις $n = 3$ διαστάσεις

- σημεία προάγονται σε γραμμές
- γραμμές προάγονται σε επίπεδα
- η λύση είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των 3 επιπέδων (ένα για κάθε εξίσωση)

Παραδείγματα δυσκολιών

- αν οποιαδήποτε 2 από τα επίπεδα ή και όλα είναι παράλληλα μεταξύ τους $\Rightarrow$ ΛΥΣΗ ΜΗ ΔΥΝΑΤΗ
- αν η ευθεία τομής δυο επιπέδων κείται επί του τρίτου $\Rightarrow$ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στην πράξη, οι δυσκολίες είναι περισσότερες γιατί οι υπολογισμοί γίνονται σε αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας[1]

[1] περισσότερα στην Αριθμητική Ανάλυση & Περιβάλλοντα Υλοποίησης

Υπομητρώα

’

Εστω μητρώο A μεγέθους $m \times n$ και φυσικοί αριθμοί $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m$ και $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_l \leq n$. Τότε το μητρώο μεγέθους $k \times l$ του οποίου το (μ, ν) στοιχείο είναι $a_{i_\mu j_\nu}$ αποκαλείται υπομητρώο του A. Αν $k = l$ και $i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k$ τότε το μητρώο καλείται κύριο (principal). Αν $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$ τότε το μητρώο καλείται αρχικό (leading).

Διαμέριση μητρώου

διαμέριση κατά γραμμές μητρώο ως παράθεση ή στοίβα από διανύσματα γραμμές

διαμέριση κατά στήλες μητρώο ως παράθεση ή στοίβα από διανύσματα στήλες

Ο συμβολισμός «:» (colon) I

Βολικός τρόπος να προσδιορίσουμε μια γραμμή ή στήλη ενος μητρώου: Για παράδειγμα, αν $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$,

τότε $A(k,:)$ είναι η k-στή γραμμή

$$A(k,:) = \begin{pmatrix} \alpha_{k,1} & \alpha_{k,2} & \dots & \alpha_{k,n} \end{pmatrix}$$

τότε $A(:,k)$ είναι η k-στή στήλη

$$A(:,k) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,k} \\ \alpha_{2,k} \\ \dots \\ \alpha_{m,k} \end{pmatrix}$$

Ο συμβολισμός μπορεί να επεκταθεί, π.χ. αν $n \geq 4$

Ο συμβολισμός «:» (colon) II

- τότε $A(k, 2:6)$ είναι το διάνυσμα που αποτελείται από τα στοιχεία στις θέσεις 2 ως και 6 της k-στής γραμμής

$$A(k,:) = \begin{pmatrix} \alpha_{k,2} & \alpha_{k,3} & \alpha_{k,4} & \alpha_{k,5} & \alpha_{k,6} \end{pmatrix}$$

ενώ $A(k, 2:3:6)$ είναι τα στοιχεία στις θέσεις 2 και 5 της k-στής γραμμής

$$A(k,:) = \begin{pmatrix} \alpha_{k,2} & \alpha_{k,5} \end{pmatrix}$$

- Παράδειγμα $A(k, 1:2:n)$ είναι τα στοιχεία στις περιττές θέσεις της k-στής γραμμής και $A(k, 2:2:n)$ είναι τα στοιχεία στις άρτιες θέσεις της k-στής γραμμής.
- Αντίστοιχα και με τις στήλες

Ο συμβολισμός «:» (colon) III

Μπορούμε να επεκτείνουμε το συμβολισμό ως προς αμφότερες τις διαστάσεις του μητρώου,

- $A(k_1 : k_2, \ell_1 : \ell_2)$: Επιλέγει τα στοιχεία από τις γραμμές k_1 ως και k_2 και από τις στήλες στις θέσεις ℓ_1 ως και ℓ_2.
- $A(k_1 : k : k_2, \ell_1 : \ell : \ell_2)$: Επιλέγει τα στοιχεία από τις γραμμές k_1 ως και k_2 με βήμα k και από τις στήλες στις θέσεις ℓ_1 ως και ℓ_2 με βήμα ℓ.

Τεμαχισμός, σύνθετα μητρώα, πλοκάδες (μπλοκ)

- Συνηθίζεται να τεμαχίζουμε σε υπομητρώα με διαδοχικές γραμμές/στήλες (πλοκάδες).
- Ενα μητρώο A μεγέθους $m \times n$ λέγεται πως είναι τεμαχισμένο σε πλοκάδες (ή μπλοκ) όταν είναι γραμμένο ως

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kl} \end{pmatrix}$$

όπου A_{ij} είναι $m_i \times n_j$ υπομητρώο του A.

- Αν δυο μητρώα είναι σύμμορφα τεμαχισμένα (conformally partitioned), τότε τα υπομητρώα που τα αποτελούν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν βαθμωτοί στο πλαίσιο πράξεων μητρώων αρκεί να μην χρησιμοποιείται αντιμεταθετικότητα στον πολλαπλασιασμό μητρώων.

Ένα μητρώο, έστω A, μπορεί να τεμαχιστεί σε «υπομητρώα» με διαμερισμό κατά γραμμές ή και στήλες π.χ.

$$
\left(\begin{array}{c|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right),
\left(\begin{array}{cc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right),
\left(\begin{array}{c|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \hline \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right),
$$

$$
\left(\begin{array}{cc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right),
\left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right),
\left(\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \hline \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right),
$$

κ.λπ.
(Προσοχή: Ο διαμερισμός που μας ενδιαφέρει προς το παρόν διαπερνά το μητρώο από άκρο σε άκρο.)
Μπορούμε να γράψουμε το καθένα παραπανω συνοπτικά μέσω των πλοκάδων που το απαρτίζουν

Μετά μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{array}\right)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_{11} &= \alpha_{11} \\ A_{12} &= (\alpha_{12}, \alpha_{13}) \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Ο τεμαχισμός δεν είναι μοναδικός ούτε κατ'' ανάγκη 2×2. Μπορούμε να επιλέξουμε πολλούς τεμαχισμούς (ό,τι ταιριάζει στην εφαρμογή μας).
- Το παραπάνω μητρώο μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι 2×2 αν το δείτε `από πολύ μακριά'. Μόνον που το κάθε στοιχείο του είναι και αυτό μητρώο. Αυτα τα υπομητρώα αναφέρονται συχνά και ως μπλοκ ενώ το αρχικό μητρώο θα λέγεται *σύνθετο*.
- Οι δείκτες των υπομητρώων αφορούν τη θέση τους στο σύνθετο υπομητρώο.

Αν

$$A = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

όπου οι πλοκάδες είναι 2×2 τότε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \text{ όπου } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Προσοχή: Τα 0 στο B είναι μηδενικά μητρώα και δεν έχουν όλα την ίδια διάσταση!

- Εκείνα που είναι στις θέσεις $(2,1),(3,1),(1,2),(1,3)$ είναι 4×4. Το 0 στη θέση $(2,3)$ είναι 4×2 και το 0 στη θέση $(3,2)$ είναι 2×4.
- Διαγώνιο κατά πλοκάδες, μη ομοιόμορφος διαμερισμός.
- όταν δεν είναι ακολουθεί από τις διαστάσεις των υπολοίπων μητρώων, υποδεικνύπουμε τα μεγέθη

$$B = \begin{pmatrix} D & 0_{4\times 4} & 0_{4\times 2} \\ 0_{4\times 4} & D & 0_{4\times 2} \\ 0_{2\times 4} & 0_{2\times 4} & A \end{pmatrix},$$

$$
\begin{pmatrix}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}
$$

Πράξεις μεταξύ σύνθετων μητρώων

Μπορούμε να προβούμε σε πράξεις με σύνθετα μητρώα,

1. εφόσον οι διαστάσεις όλων των επιμέρους υπομητρώων είναι συμβατές για τις πράξεις,
2. (οπότε) οι διαστάσεις των αρχικών μητρώων είναι επίσης συμβατές.
3. επομένως μπορούμε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα βάσει πράξεων μεταξύ των πλοκάδων που αποτελούν τα πολλαπλασιαζόμενα μητρώα.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & \cdots & A_{1,K}+B_{1,K} \\ A_{2,1}+B_{2,1} & \cdots & A_{2,K}+B_{2,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M,1}+B_{M,1} & \cdots & A_{M,K}+B_{M,K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,K} \\ A_{2,1} & \cdots & A_{2,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M,1} & \cdots & A_{M,K} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,K} & \\ B_{2,1} & \cdots & B_{2,K} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{M,1} & \cdots & B_{M,K} & \end{pmatrix}$$

Προσοχή: υπό την προϋπόθεση ότι τα ζεύγη των υπομητρώων $A_{i,j}, B_{i,j}$ είναι σύμμορφα.

Πράξεις σύνθετων μητρώων: Παραδείγματα

- Πριν γράψαμε το B ως σύνθετο μητρώο με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Παρόλο, που η πράξη $B+B$ είναι πάντα εφικτή, δεν είναι δυνατόν να την εκφράσουμε ως πρόσθεση των παρακάτω εκφράσεων ως σύνθετα μητρώα: π.χ. οι δυο εκδοχές του B

$$\begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & G \\ H & F \end{pmatrix}$$

όπου $E = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$, $F = A$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix}$, $H = 0$, $F = (0, A)$.

- ενώ

$$A = \begin{pmatrix} I & I \\ I & D \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} D & 0 \\ I & D \end{pmatrix}$$

$$2A + C = \begin{pmatrix} 2I + D & 2I \\ 3I & 3D \end{pmatrix}$$

Αναστροφή σύνθετων μητρώων

Προκειμένου για σύνθετα μητρώα, η αναστροφή ορίζεται όπως θα περιμέναμε. Για παράδειγμα, αν έχει γίνει σωστά ο διαχωρισμός σε μπλοκ A_{ij} για το μητρώο A, τότε

$$A^\top = \begin{pmatrix} A_{11}^\top & A_{21}^\top & \cdots & \\ A_{12}^\top & A_{22}^\top & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^\top = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right)^\top = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11}^\top & A_{21}^\top \\ A_{21}^\top & A_{22}^\top \end{pmatrix}$$

Εφαρμογές: Πολλαπλασιασμός μητρώο- διάνυσμα

$$A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ όπου } a_i \in \mathbb{R}^m \text{ και } x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

Το πλήθος στηλών του A πρέπει να είναι ίσο με το μέγεθος (πλήθος γραμμών) του x

Το γινόμενο b του μητρώου A με το διάνυσμα x, που γράφουμε απλά $b = Ax$ μπορεί να θεωρηθεί (ισοδύναμα) ότι είναι:

Υπενθύμιση: Το σύμβολο «:» χρησιμοποιείται για να κατασκευάσουμε ή και να επιλέξουμε στοιχεία ενός μητρώου. Προς το παρόν να θεωρήσετε ότι $A_{:,j}$ είναι η στήλη j και $A_{i,:}$ είναι η γραμμή i του μητρώου A.

Δύο θεωρήσεις

1η θεώρηση (κατά στήλες) με γραμμικό συνδυασμό το διάνυσμα του γραμμικού συνδυασμού των στηλών του A με συντελεστές τα στοιχεία του x

$$b = \xi_1 A_{:,1} + \cdots + \xi_n A_{:,n}, \in \mathbb{R}^m,$$

2η θεώρηση (κατά γραμμές) με εσωτερικά γινόμενα το διάνυσμα που περιέχει για στοιχεία στις θέσεις $i = 1, \ldots, m$ το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του A με το x

$$Ax = \begin{pmatrix} A_{1,:}x \\ A_{2,:}x \\ \vdots \\ A_{m,:}x \end{pmatrix}$$

Και στις δύο περιπτώσεις το αποτέλεσμα είναι

$$b = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cdot \xi_1 + \alpha_{12} \cdot \xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n \\ \alpha_{21} \cdot \xi_1 + \alpha_{22} \cdot \xi_2 + \cdots + \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot \xi_1 + \alpha_{m2} \cdot \xi_2 + \cdots + \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Με γραμμικό συνδυασμό

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Με εσωτερικά γινόμενα

$$Ax = \begin{pmatrix} 50 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \\ 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων

Ως γενίκευση πολλαπλασιασμού μητρώου επί διάνυσμα Αν A είναι $m \times k$ και το B είναι $k \times n$ τότε

$$\begin{aligned} C &= AB = A(B_{:,1}, \cdots, B_{:,n}) \\ &= (AB_{:,1}, \cdots, AB_{:,n}) \end{aligned}$$

που είναι $m \times n$.

Εναλλακτικά

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1,:} \\ \vdots \\ A_{m,:} \end{pmatrix} (B_{:,1}, \ldots, B_{:,n}) = \begin{pmatrix} A_{1,:}B_{:,1} & \cdots & A_{1,:}B_{:,n} \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ A_{m,:}B_{:,1} & \cdots & A_{m,:}B_{:,n} \end{pmatrix}$$

<u>εναλλακτικά</u>

$$AB = (A_{:,1}, \ldots, A_{:,k}) \begin{pmatrix} B_{1,:} \\ \vdots \\ B_{k,:} \end{pmatrix} = A_{:,1}B_{1,:} + \cdots + A_{:,k}B_{k,:}$$

Παράδειγμα: πολλαπλασιασμος σύνθετων μητρώων

Εφόσον οι τεμαχισμοί είναι σύμμορφοι,

$$\begin{pmatrix} B_{11}C_{11}+B_{12}C_{21} & B_{11}C_{12}+B_{12}C_{22} \\ B_{21}C_{11}+B_{22}C_{21} & B_{21}C_{12}+B_{22}C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων

Θεώρηση μέσω των σύνθετων μητρώων

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,N} \\ \boxed{C_{2,1}} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{M,1} & C_{M,2} & \cdots & C_{M,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,K} \\ \mathbf{A_{2,1}} & \mathbf{A_{2,2}} & \cdots & \mathbf{A_{2,k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M,1} & A_{M,2} & \cdots & A_{M,K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B_{1,1}} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,N} \\ \mathbf{B_{2,1}} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B_{K,1}} & B_{K,2} & \cdots & B_{K,N} \end{pmatrix}$$

Γενικός τύπος

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + \cdots + A_{i,K}B_{K,j} \\ &= \sum_{s=1}^{k} A_{i,s}B_{s,j}, \text{ για } i = 1, \ldots, M \text{ και } j = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

Προσοχή: Για εγκυρότητα πρέπει οι διαστάσεις των υπομητρώων που πολλαπλασιάζονται να είναι συμβατές και οι όροι που αθροίζονται να είναι σύμμορφοι!

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right), \; B = \left(\begin{array}{cc|c} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \hline \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{array}\right),$$

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \hline \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{array}\right), \; D = \left(\begin{array}{cc|c} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \hline \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{array}\right)$$

- τα παραπάνω μητρώα μπορούν να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους χωρίς πρόβλημα
- αν όμως θέλουμε να εκφράσουμε τα γινόμενα μέσω επιμέρους πράξεων των υπομητρώων που τα απαρτίζουν, από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ποιοί είναι έγκυροι; (να εξηγήσετε)

AA	AB	AC	AD	BB	BC	BD	CC	CD	DD
🙂	🙁	🙁	🙂	🙂	🙂	🙁	🙁	🙂	🙁

Αντίστροφο κατά πλοκάδες κάτω τριγωνικού μητρώου

Αναζητούμε το αντίστροφο του $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ Επειδή θα είναι και αυτό κατά πλοκάδες κάτω τριγωνικό (αν υπάρχει), το γράφουμε στη μορφή (με τις σωστές διαστάσεις) $N = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}$

Θα πρέπει να ικανοποιεί $MN = I$ δηλ.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

άρα

$$\begin{aligned} A\hat{A} &= I \Rightarrow \hat{A} = A^{-1} \\ D\hat{D} &= I \Rightarrow \hat{D} = D^{-1} \\ C\hat{A} + D\hat{C} &= 0 \Rightarrow \hat{C} = -D^{-1}CA^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Αν το A είναι αντιστρέψιμο,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -A^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix}$$

π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Απαλοιφή Gauss

Βασική ιδέα: Μετατροπή του αρχικού προβλήματος σε ένα πιο εύκολο

$$Ax = b \Rightarrow Ux = \hat{b}$$

όπου το U είναι άνω τριγωνικό

$$U = \begin{pmatrix} \upsilon_{11} & \upsilon_{12} & & \upsilon_{1n} \\ & \upsilon_{22} & & \\ & \vdots & \ddots & \upsilon_{n-1,n} \\ & & & \upsilon_{n,n} \end{pmatrix}$$

και συνδέεται με έναν σχετικά απλό τρόπο με το αρχικό A.

Γιατί να το κάνουμε αυτό;

Η λύση με το U υπολογίζεται εύκολα ($\xi_n \to \xi_{n-1} \to \cdots \to \xi_1$)

Πίσω αντικατάσταση Ένα απλό παράδειγμα: Έστω

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ζητούμενο } x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}$$

Βήμα 1: Επίλυση της n-στής εξίσωσης ως προς ξ_n ($n = 4$):

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \boxed{\xi_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\xi_4 = -1} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \boxed{\xi_3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: Επίλυση της 3ης εξίσωσης ως προς ξ_3:

$$\overbrace{2}^{\upsilon_{33}}\,\xi_3 + \overbrace{\frac{2}{3}}^{\upsilon_{34}}\,\overbrace{(-1)}^{\xi_4} = \frac{10}{3} \Rightarrow \boxed{\xi_3 = 2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \boxed{\xi_2} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Επίλυση της 2ης εξίσωσης ως προς ξ_2:

$$\overbrace{2}^{\upsilon_{22}} \xi_2 + \overbrace{\frac{4}{3}}^{\upsilon_{23}} \overbrace{2}^{\xi_3} + \overbrace{\frac{2}{3}}^{\upsilon_{24}} \overbrace{(-1)}^{\xi_4} = 2 \Rightarrow \boxed{\xi_2 = 0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\xi_1} \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 4: Επίλυση της 1ης εξίσωσης ως προς ξ_1:

$$\overbrace{2}^{\upsilon_{11}} \color{red}{\xi_1} \color{black} + \overbrace{\frac{4}{3}}^{\upsilon_{12}} \overbrace{0}^{\xi_2} + \overbrace{\frac{2}{3}}^{\upsilon_{13}} \overbrace{2}^{\xi_3} + \overbrace{0}^{\upsilon_{14}} \overbrace{(-1)}^{\xi_4} = 2 \Rightarrow \boxed{\xi_1 = \frac{1}{3}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Επίλυση τριγωνικών συστημάτων

- Είδαμε ότι η επίλυση $Ux = b$ είναι «εύκολη».
- Πόσο στοιχίζει;

Επίλυση τριγωνικών συστημάτων

- Είδαμε ότι η επίλυση $Ux = b$ είναι «εύκολη».
- Πόσο στοιχίζει; $\Omega = n^2$ (να το επαληθεύσετε!)
- Τι γίνεται αν θέλαμε να λύσουμε κάτω τριγωνικό $Lx = b$;

Επίλυση τριγωνικών συστημάτων

- Είδαμε ότι η επίλυση $Ux = b$ είναι «εύκολη».
- Πόσο στοιχίζει; $\Omega = n^2$ (να το επαληθεύσετε!)
- Τι γίνεται αν θέλαμε να λύσουμε κάτω τριγωνικό $Lx = b$; εμπρός αντικατάσταση (ίδια ιδέα)

Προτείνουμε: να λύσετε μερικά μικρά κάτω τριγωνικά και άνω τριγωνικά συστήματα ...

A. Quarteroni, F. Saleri, and P. Gervasio.
Numerical Methods using MATLAB and Octave.
Springer, 4th edition, 2014.