ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος

CEID

Διάλεξη 2

22 Φεβρουαρίου 2018

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση I

Υπενθύμιση της 1ης δ.

- βαθμωτός, διάνυσμα, μητρώο & συμβολισμοί/γραφή
- τα σύνολα $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$ και τα διανύσματα n στοιχείων ως σημεία στον $\mathbb{R}^n$,
- ισότητα και κανόνες αριθμητικής μητρώων: πολλαπλασιασμός με βαθμωτούς και προσθαφαίρεση με σύμμορφα μητρώα $\gamma A + \delta B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ όπου $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- διαγώνιος μητρώου και διαγώνιο μητρώο
- κάτω/άνω τριγωνικό μητρώο
- τα διανύσματα e_j, το ταυτοτικό μητρώο I ή $I_{n,n}$, το μηδενικό μητρώο
- συμμετρικά μητρώα
- νόρμες διανυσμάτων, $\|x\|_p$ (π.χ. νόρμα-2, νόρμα-1, νόρμα-∞)
- οι νόρμες είναι (μη αρνητικές) συναρτήσεις $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, δηλ. $\|x\|_p \geq 0$ και $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- γραμμικός συνδυασμός και διάνοιγμα
- πολλαπλασιασμός μητρώου με διάνυσμα (ορισμός μέσω γραμμικών συνδυασμών) και κανόνες εφαρμογής του.

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση II

Σήμερα (όροι 2ης δ.):

- πολλαπλασιασμός μητρώων και κανόνες εφαρμογής του (συνχ.)
- Μητρώα μετάθεσης και η ειδική περίπτωση της εναλλαγής.
- ΄Αλλα ειδικά μητρώα: Διαγώνια, τριγωνικά, τριδιαγώνια, Toeplitz. Αραιά μητρώα.
- Κυρτός συνδυασμός διανυσμάτων.

Υπό συζήτηση ενότητες

Πολλαπλασιασμός μητρώων (από 1η δ)

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μητρώα μεταξύ τους μόνον εφόσον ικανοποιούνται ορισμένοι απλοί κανόνες που αφορούν στις διαστάσεις τους. Οι πράξεις που επιτελούνται μπορούν να ερμηνευτούν με διάφορους τρόπους. Μητρώο επί διάνυσμα-στήλη: ερμηνεία με γραμμικό συνδυασμό Το αποτέλεσμα είναι το διάνυσμα στήλη που σχηματίζεται από το γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων-στηλών που σχηματιζονται από τις στήλες του μητρώου με συντελεστές τα στοιχεία του δεξιού διανύσματος (πολλαπλασιαστέου).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων (από 1η δ)

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μητρώα μεταξύ τους μόνον εφόσον ικανοποιούνται ορισμένοι απλοί κανόνες που αφορούν στις διαστάσεις τους. Οι πράξεις που επιτελούνται μπορούν να ερμηνευτούν με διάφορους τρόπους.

Διάνυσμα-γραμμή επί μητρώο: ερμηνεία με γραμμικό συνδυασμό Το αποτέλεσμα είναι το διάνυσμα γραμμή που σχηματίζεται από το γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων-γραμμών που σχηματιζονται από τις γραμμές του μητρώου με συντελεστές τα στοιχεία του αριστερού διανύσματος (πολλαπλασιαστή).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Παρατηρήσεις Ι

Είδαμε ότι ο πολλαπλασιασμός εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός π.χ. $c = Ax$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αλλά θα μπορούσαμε να γράψουμε και

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή

$$c = Ax = \hat{A}\hat{x}, \text{ όπου } \hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Τα μητρώα $A, \hat{A}$ και τα διανύσματα $x, \hat{x}$ σχετίζονται μεταξύ τους:

- Το $\hat{A}$ έχει προέλθει από εναλλαγή των στηλών 1 με 2 του A.
- Το $\hat{x}$ έχει προέλθει από εναλλαγή των γραμμών 1 με 2 του x.

Παρατηρήσεις II

Οι εναλλαγές αυτές μπορούν να κωδικοποιηθούν μέσω ενός μητρώου μετάθεσης και πολλαπλασιασμούς με αυτό:
Μητρώο μετάθεσης (η ειδική περίπτωση εδώ καλείται και μητρώο εναλλαγής)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 & e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2^\top \\ e_1^\top \end{pmatrix}$$

Επαληθεύστε ότι:

$$\hat{x} = Px \text{ και } \hat{A} = AP$$

Παρατήρηση: Γράφουμε AP εννοώντας τον πολλαπλασιασμό του μητρώου A με το μητρώο P. Αυτή τη στιγμή θεωρήστε αυτό ως τις στήλες που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του A με τις στήλες του $P = (e_1, e_2)$. Δηλ. η 1η στήλη του $\hat{A}$ είναι το Ae_1 και η 2η στήλη του $\hat{A}$ είναι το A_2. Συνοπτικά $\hat{A} = (Ae_1, Ae_2)$.

Προσοχή: Επαληθεύστε ότι όταν το μητρώο μετάθεσης πολλαπλασιάζει από τα αριστερά (δεξιά), γίνεται μετάθεση των γραμμών (στηλών).

Πολλαπλασιασμός μητρώων (από 1η δ)

Πώς πολλαπλασιάζουμε μητρώα μεταξύ τους; α) ο πολλαπλασιασμός δεν είναι πάντα έγκυρος. β) Όταν είναι, υπάρχουν πολλές ισοδύναμες ερμηνείες.

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>1) Το αριστερό μητρώο επί κάθε διάνυσμα-στήλη του δεξιού μητρώο</u>

$$\begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -14 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

γιατί

$$\begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -14 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων (από 1η δ)

Πώς πολλαπλασιάζουμε μητρώα μεταξύ τους; α) ο πολλαπλασιασμός δεν είναι πάντα έγκυρος. β) Όταν είναι, υπάρχουν πολλές ισοδύναμες ερμηνείες.

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Κάθε διάνυσμα-γραμμή του αριστερού μητρώου επί το δεξιό μητρώο

$$\begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -14 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

γιατί

$$\begin{pmatrix} -10 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -14 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Σημαντικές παρατηρήσεις

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Για να είναι έγκυρος ο πολλαπλασιασμός πρέπει να υπάρχουν στοιχεία στις κατάλληλες θέσεις.
Στην 1η περίπτωση το δεξιό διάνυσμα-στήλη πρέπει να έχει όσες γραμμές είναι οι στήλες του μητρώου.
Στην 2η περίπτωση το αριστερό διάνυσμα-γραμμή πρέπει να έχει όσες στήλες είναι οι γραμμές του μητρώου.
Πρόταση

Αν το A είναι $m \times k$ και το B είναι $\hat{k} \times n$ τότε ο πολλαπλασιασμός AB είναι έγκυρος αν και μόνον αν $k = \hat{k}$, οπότε το αποτέλεσμα θα είναι $m \times n$.

Παρατηρήσεις I

Είδαμε ότι ο πολλαπλασιασμός εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός π.χ. $c = Ax$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αλλά θα μπορούσαμε να γράψουμε και

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή

$$c = Ax = \hat{A}\hat{x}, \text{ όπου } \hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Τα μητρώα $A, \hat{A}$ και τα διανύσματα $x, \hat{x}$ σχετίζονται μεταξύ τους:

- Το $\hat{A}$ έχει προέλθει από εναλλαγή των στηλών 1 με 2 του A.
- Το $\hat{x}$ έχει προέλθει από εναλλαγή των γραμμών 1 με 2 του x.

Παρατηρήσεις II

Οι εναλλαγές αυτές μπορούν να κωδικοποιηθούν μέσω ενός μητρώου μετάθεσης και πολλαπλασιασμούς με αυτό:
Μητρώο μετάθεσης (η ειδική περίπτωση εδώ καλείται και μητρώο εναλλαγής)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 & e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2^\top \\ e_1^\top \end{pmatrix}$$

Επαληθεύστε ότι:

$$\hat{x} = Px \text{ και } \hat{A} = AP$$

Παρατήρηση: Γράφουμε AP εννοώντας τον πολλαπλασιασμό του μητρώου A με το μητρώο P. Αυτή τη στιγμή θεωρήστε αυτό ως τις στήλες που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του A με τις στήλες του $P = (e_1, e_2)$. Δηλ. η 1η στήλη του $\hat{A}$ είναι το Ae_1 και η 2η στήλη του $\hat{A}$ είναι το A_2. Συνοπτικά $\hat{A} = (Ae_1, Ae_2)$.

Προσοχή: Επαληθεύστε ότι όταν το μητρώο μετάθεσης πολλαπλασιάζει από τα αριστερά (δεξιά), γίνεται μετάθεση των γραμμών (στηλών).

Πολλαπλασιασμός μητρώων

Πώς πολλαπλασιάζουμε μητρώα μεταξύ τους; α) ο πολλαπλασιασμός δεν είναι πάντα έγκυρος. β) Όταν είναι, υπάρχουν πολλές ισοδύναμες ερμηνείες.

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Το αριστερό μητρώο επί κάθε διάνυσμα-στήλη του δεξιού μητρώο

$$\begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -14 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

γιατί

$$\begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -14 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων

Πώς πολλαπλασιάζουμε μητρώα μεταξύ τους; α) ο πολλαπλασιασμός δεν είναι πάντα έγκυρος. β) Όταν είναι, υπάρχουν πολλές ισοδύναμες ερμηνείες.

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>2) Κάθε διάνυσμα-γραμμή του αριστερού μητρώου επί το δεξιό μητρώο</u>

$$\begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -14 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

γιατί

$$(-10 \quad -14) = (-1 \quad -3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (-14 \quad -20) = (-2 \quad -4) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων

$$\begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -14 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ονομάζουμε τα παραπάνω μητρώα A, B και το γινόμενο C οπότε γράφουμε $C = AB$.
Μπορούμε να υπολογίσουμε το BA;

1. Το πλήθος στηλών του B είναι όσες οι γραμμές του A άρα ο πολλαπλασιασμός είναι έγκυρος.
2. Με τι ισούται; Χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις παραπάνω μεθόδους:

$$\begin{pmatrix} -5 & -11 \\ -11 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Γενικά $AB \neq BA$. ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Η ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ!

Αλυσίδα πολλαπλασιασμών - Προσεταιριστική ιδιότητα ΟΚ

Δίδονται μητρώα A, B, C, τέτοια ώστε το A, B να μπορούν να πολλαπλασιαστούν και το ίδιο το C με το AB, τότε

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

και με αντίστοιχους όρους θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε

$$F = (((A \cdot B) \cdot C) \cdot D) \cdot E$$

με όποια σειρά θέλουμε όσον αφορά στις παρενθέσεις. Για παράδειγμα

$$F = A \cdot (B \cdot (C \cdot (D \cdot E)))$$

Όμως απαγορεύεται να αλλάξουμε τη σειρά των μητρώων στο γινόμενο! π.χ.

$$(((A \cdot B) \cdot C) \cdot D) \cdot E \neq (((B \cdot A) \cdot C) \cdot D) \cdot E$$

Ιδιαιτερότητες

Θυμηθείτε Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ τότε $\alpha\beta \neq 0$.

Ιδιαιτερότητες

Θυμηθείτε Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ τότε $\alpha\beta \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣΕΞΤΕ μπορεί να ισχύει ότι $AB = 0$ ενώ $A \neq 0$ και $B \neq 0$.

Ιδιαιτερότητες

<u>Θυμηθείτε</u> Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ τότε $\alpha\beta \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>ΠΡΟΣΕΞΤΕ</u> μπορεί να ισχύει ότι $AB = 0$ ενώ $A \neq 0$ και $B \neq 0$.

... και επιβεβαιώνοντας την έλλειψη αντιμεταθετικότητας:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ιδιαιτερότητες

Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha\beta = \alpha\gamma$ τότε $\beta = \gamma$.

Ιδιαιτερότητες

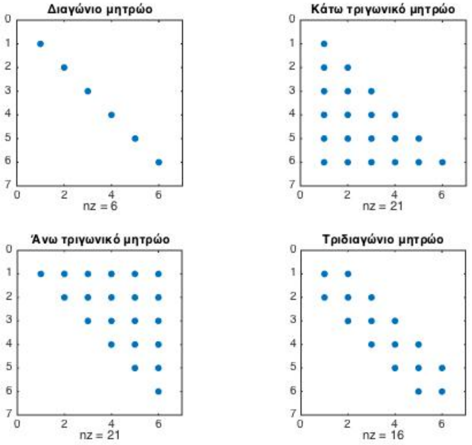
Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha\beta = \alpha\gamma$ τότε $\beta = \gamma$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣΕΞΤΕ μπορεί να ισχύει ότι $AB = AC$ ενώ $B \neq C$.

Μερικά είδη μητρώων

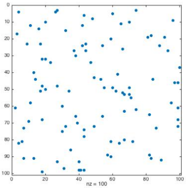
Πολλές φορές χαρακτηρίζουμε τα μητρώα με βάση το πρότυπο (pattern) που σχηματίζουν τα μη μηδενικά τους στοιχεία ("μη μηδενική δομή").



<u>μητρώο Toeplitz</u>

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Αραιό μητρώο</u>: μητρώο με $\mathcal{O}(1)$ μη μηδενικά ανά γραμμή ή στήλη.



Άσκηση

Δίνονται

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε αν μπορούν να υπολογιστούν τα παρακάτω και αν ναι να τα υπολογίσετε:

$$AA, AA^\top, A^\top A, AB, BA, B^2, AA^\top - B, AA^\top AA^\top$$

Δυνάμεις μητρώου

Για κάθε τετραγωνικό μητρώο A και θετικό ακέραιο k η k-οστή δύναμη του A είναι το μητρώο που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του A με τον εαυτό του, k φορές.

$$A^k = A \cdot A \cdots A.$$

Επιπλέον $A^0 = I$.

Πολλαπλασιασμός μητρώων

Προσέξτε τις γραμμικές συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές (x, y)

$$\begin{aligned} &3x + 2y \\ &-x + y \\ &10x - y \end{aligned}$$

και ότι επιτελούμε αλλαγή μεταβλητών $(x, y) \to (\hat{x}, \hat{y})$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}\hat{x} + \alpha_{12}\hat{y} \\ y &= \alpha_{21}\hat{x} + \alpha_{22}\hat{y} \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας οι εξισώσεις είναι

$$\begin{aligned} &3(\alpha_{11}\hat{x} + \alpha_{12}\hat{y}) + 2(\alpha_{21}\hat{x} + \alpha_{22}\hat{y}) \\ &-(\alpha_{11}\hat{x} + \alpha_{12}\hat{y}) + (\alpha_{21}\hat{x} + \alpha_{22}\hat{y}) \\ &10(\alpha_{11}\hat{x} + \alpha_{12}\hat{y}) - (\alpha_{21}\hat{x} + \alpha_{22}\hat{y}) \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} &(3\alpha_{11} + 2\alpha_{21})\hat{x} + (3\alpha_{12} + 2\alpha_{22})\hat{y} \\ &(-\alpha_{11} + \alpha_{21})\hat{x} + (-\alpha_{12} + \alpha_{22})\hat{y} \\ &(10\alpha_{11} - \alpha_{21})\hat{x} + (10\alpha_{12} - \alpha_{22})\hat{y} \end{aligned}$$

Μητρώα συντελεστών I

Προσέξτε τις γραμμικές συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές (x, y)

$$\begin{matrix} 3x+2y \\ -x+y \\ 10x-y \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$$

και ότι επιτελούμε αλλαγή μεταβλητών $(x, y) \to (\hat{x}, \hat{y})$

$$\begin{matrix} x & = & \alpha_{11}\hat{x}+\alpha_{12}\hat{y} \\ y & = & \alpha_{21}\hat{x}+\alpha_{22}\hat{y} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

άρα

$$\begin{matrix} (3\alpha_{11}+2\alpha_{21})\hat{x}+(3\alpha_{12}+2\alpha_{22})\hat{y} \\ (-\alpha_{11}+\alpha_{21})\hat{x}+(-\alpha_{12}+\alpha_{22})\hat{y} \\ (10\alpha_{11}-\alpha_{21})\hat{x}+(10\alpha_{12}-\alpha_{22})\hat{y} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3\alpha_{11}+2\alpha_{21} & 3\alpha_{12}+2\alpha_{22} \\ -\alpha_{11}+\alpha_{21} & -\alpha_{12}+\alpha_{22} \\ 10\alpha_{11}-\alpha_{21} & 10\alpha_{12}-\alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha_{11}+2\alpha_{21} & 3\alpha_{12}+2\alpha_{22} \\ -\alpha_{11}+\alpha_{21} & -\alpha_{12}+\alpha_{22} \\ 10\alpha_{11}-\alpha_{21} & 10\alpha_{12}-\alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

Κυρτός συνδυασμός διανυσμάτων I

Πρόκειται για μία εξειδίκευση της έννοιας του γραμμικού συνδυασμού. Δοθέντος ενός συνόλου διανυσμάτων $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_2\}$ ο γραμμικός συνδυασμός

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_s v_s$$

χαρακτηρίζεται ως κυρτός γραμμικός συνδυασμός (convex linear combination) όταν

$$\text{Για κάθε } i = 1, \ldots, s, \text{ ισχύει ότι } 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ και } \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1.$$

Σημ.: Η κυρτότητα είναι σημαντική ιδιότητα που αφορά σε πολλές εφαρμογές. Παρατηρήστε επίσης ότι με τους περιορισμούς που τέθηκαν για τα α_i, οι τιμές αυτές μπορεί να θεωρηθούν πιθανότητες.

Παράδειγμα: Στην επόμενη διαφάνεια, δείτε ότι τα σημεία που προέρχονται από κυρτούς συνδυασμούς των σημείων (διανυσμάτων) A και B βρίσκονται επί της ευθείας που τα συνδέει!

Κυρτός συνδυασμός διανυσμάτων II