Άσκηση 1

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε μια ανάθεση τιμών στις δυαδικές μεταβλητές a, b, c, d, e και f, ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:
(¬a ∪ c) ∩ (¬a ∪ c ∪ ¬e) ∩ (¬b ∪ c ∪ d ∪ ¬e) ∩ (a ∪ ¬b ∪ c) ∩ (¬e ∪ f)
Δημιουργείστε έναν αρχικό πληθυσμό τεσσάρων χρωμοσωμάτων, ορίστε τη συνάρτηση καταλληλότητας και επιλύστε το πρόβλημα εφαρμόζοντας τις τεχνικές της διασταύρωσης και της μετάλλαξης. Θεωρείστε πιθανότητα μετάλλαξης ίσης με 0.001.
Θεωρείστε ότι έχετε γεννήτρια τυχαίων αριθμών η οποία σας δίνει (με τη σειρά) την παρακάτω ακολουθία τυχαίων αριθμών από το 0 ως το 1.
0.5653, 0.7850, 0.3352, 0.4554, 0.2919, 0.5357, 0.2466, 0.5077, 0.4815, 0.6790, 0.4668, 0.6764, 0.4161, 0.7796, 0.5559, 0.1280, 0.7301, 0.1737, 0.2309, 0.7655, 0.3338, 0.1255, 0.5173, 0.3148, 0.2881, 0.6349, 0.8326, 0.3914, 0.7681, 0.5750, 0.0540, 0.6870, 0.6314, 0.6923, 0.2917, 0.9627, 0.4428, 0.4976, 0.0262, 0.0744, 0.2175, 0.7504, 0.8668, 0.6196, 0.0340, 0.3349, 0.2569, 0.6596, 0.8477, 0.3751, 0.9119, 0.4655, 0.3057, 0.1837, 0.7605, 0.8132, 0.2156, 0.3142, 0.5552, 0.8473,
0.4889, 0.0474, 0.6617, 0.1524, 0.3824, 0.2644, 0.3426, 0.1142, 0.3901, 0.1443, 0.7898, 0.5873.
Υπόδειξη 1: Χρησιμοποιείστε τους τυχαίους αριθμούς για να δημιουργήσετε τον αρχικό πληθυσμό, για να επιλέξετε ζευγάρια χρωμοσωμάτων, τα σημεία διασταύρωσης (Σαν υποψήφια σημεία διασταύρωσης να πάρετε και τα ακραία που θα έχουν σαν αποτέλεσμα τα παιδιά να είναι ίδια με τους γονείς) και τις ενδεχόμενες μεταλλάξεις. Σε περίπτωση που χρειαστείτε επιπλέον τυχαίους αριθμούς, χρησιμοποιείστε τον πίνακα ξανά από την αρχή.
Υπόδειξη 2: Σε περίπτωση που χρειάζεστε τυχαίους αριθμούς σε άλλη κλίμακα, μπορείτε να πολλαπλασιάζετε τον επόμενο τυχαίο αριθμό επί το μέγιστο της κλίμακάς σας (θεωρώντας ότι όλες οι κλίμακες ξεκινούν από το μηδέν).

Λύση:

Κάθε χρωμόσωμα θα έχει 6 ψηφία, μηδενικά ή άσσους, τα οποία αντιστοιχούν στις μεταβλητές a, b, c, d, e και f αντίστοιχα. Η τιμή 0 για ένα bit ισοδυναμεί με το ψευδές ενώ η τιμή 1 ισοδυναμεί με το αληθές.
Δημιουργούμε τον αρχικό πληθυσμό των τεσσάρων χρωμοσωμάτων χρησιμοποιώντας τους 24 πρώτους τυχαίους αριθμούς. Κάθε φορά που ο τυχαίος αριθμός είναι μικρότερος από 0.50, το αντίστοιχο bit είναι μηδέν, ενώ κάθε φορά που ο τυχαίος αριθμός είναι μεγαλύτερος του 0.5, το αντίστοιχο bit είναι μονάδα.
110001, 010101, 011010, 010010.
Χρησιμοποιούμε ως συνάρτηση αξιολόγησης το πλήθος των όρων της σύζευξης που ικανοποιεί κάθε υποψήφια λύση. Έτσι ο μέγιστος βαθμός κάθε υποψήφιας λύσης είναι το 5 (που αντιστοιχεί και στις πραγματικές λύσεις του προβλήματος) και ο ελάχιστος το 0. Βαθμολογούμε λοιπόν τις τέσσερις λύσεις ως εξής:
A = 110001 -> 4
B = 010101 -> 4
Γ = 011010 -> 4
Δ = 010010 -> 2
Υπολογίζουμε τις αθροιστικές καταλληλότητες των τεσσάρων χρωμοσωμάτων:
A = 110001 -> 4
B = 010101 -> 8

Γ = 011010 -> 12
Δ = 010010 -> 14
Δημιουργούμε τα 2 ζευγάρια προς διασταύρωση, χρησιμοποιώντας τους επόμενους τέσσερις τυχαίους αριθμούς, πολλαπλασιασμένους επί 14. Οι αριθμοί αυτοί, μετά τον πολλαπλασιασμό, είναι οι:
4.0334, 8.8886, 11.6564, 5.4796
δημιουργώντας τα ζευγάρια **Β-Γ** και **Γ-Β.**
Για κάθε ένα ζευγάρι πρέπει τώρα να επιλέξουμε το σημείο στο οποίο θα γίνει η διασταύρωση. Υπάρχουν πέντε υποψήφιες θέσεις, άρα χρειαζόμαστε δύο τυχαίους αριθμούς από το 0 ως το 5.
Αυτοί είναι οι εξής (με πολλαπλασιασμό των επόμενων δύο τυχαίων αριθμών επί 5):
3.8405, 2.875
δίνοντας ως σημεία διασταύρωσης τα 4 και 3.
Άρα, μετά τις διασταυρώσεις παίρνουμε τα εξής νέα χρωμοσώματα:
Γονείς Απόγονοι
Β = 0101-01
Γ = 0110-10
Α' = 010110
Β' = 011001
Γ = 011-010
Β = 010-101
Γ' = 011101
Δ' = 010010
Στη συνέχεια εξετάζουμε το ενδεχόμενο μετάλλαξης. Οι απόγονοι έχουν συνολικά 24 bits που μπορεί να υποστούν μετάλλαξη, το καθένα με πιθανότητα μετάλλαξης 0.001. Κοιτάζουμε στους επόμενους 24 τυχαίους αριθμούς εάν υπάρχει κάποιος που είναι μικρότερος από 0.001. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, οπότε ο νέος πληθυσμός είναι όπως προέκυψε από την διασταύρωση.
Η βαθμολογία των τεσσάρων νέων χρωμοσωμάτων είναι η εξής:
Α' = 010110 -> 3
Β' = 011001 -> 5
Γ' = 011101 -> 5
Δ' = 010010 -> 2
Βλέπουμε λοιπόν ότι δημιουργήθηκαν δύο λύσεις, οπότε ο αλγόριθμος τερματίζει.

Άσκηση 2

Έστω το πρόβλημα του σάκου. Ειδικότερα έχουμε ένα σάκο χωρητικότητας 20 μονάδων όγκου και οκτώ αντικείμενα με όγκους και αξίες που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αντικείμενο	**#1**	**#2**	**#3**	**#4**	**#5**	**#6**	**#7**	**#8**
Όγκος	4	7	9	3	5	8	6	2
Αξία	7	11	14	6	9	10	8	4

Σχεδιάστε έναν γενετικό αλγόριθμο για να επιλέξετε τα αντικείμενα που θα βάλετε στο σάκο.
Χρησιμοποιείστε πληθυσμό 4 χρωμοσωμάτων που ανανεώνεται πλήρως από γενιά σε γενιά. Προσομοιώστε την εκτέλεση του γενετικού αλγορίθμου για μία γενιά,

χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τυχαίους αριθμούς. Κατά την διαδικασία επιλογής των σημείων διασταύρωσης θεωρήστε σαν πιθανά σημεία και τα άκρα των χρωμοσωμάτων των οποίων η επιλογή θα έχει σαν αποτέλεσμα τα παιδιά να είναι ίδια με τους γονείς. Επίσης, μετά από κάθε διασταύρωση εφαρμόστε στα παιδιά την μετάλλαξη τους.

0,463714	0,234374	0,439749	0,682675	0,718773	0,336385	0,857697	0,514626	0,733548	0,064739
0,846527	0,575729	0,169738	0,213356	0,950259	0,894705	0,709656	0,351561	0,633967	0,786981
0,524763	0,082884	0,04294	0,447761	0,678321	0,122616	0,181008	0,384417	0,485948	0,940825
0,134495	0,381887	0,004923	0,62178	0,357079	0,83456	0,444426	0,854376	0,759619	0,700447
0,37438	0,546525	0,191075	0,572425	0,236702	0,120707	0,162193	0,81587	0,43323	0,686798
0,721702	0,156205	0,033132	0,366019	0,447154	0,747949	0,578424	0,011562	0,515549	0,436496
0,47614	0,736317	0,806684	0,152427	0,121268	0,118964	0,547473	0,457706	0,303001	0,954014
0,931515	0,895721	0,637368	0,266807	0,661972	0,14058	0,909241	0,449968	0,285917	0,737923
0,365261	0,732603	0,744999	0,880942	0,045167	0,955587	0,698081	0,061709	0,182705	0,86275
0,336751	0,059842	0,097732	0,438901	0,814771	0,032585	0,214809	0,186065	0,005883	0,941831

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε δυαδικά χρωμοσώματα οκτώ θέσεων, με κάθε θέση να αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο και το 1 να δηλώνει την επιλογή του αντικειμένου ενώ το 0 τη μη επιλογή του. Το πρόβλημα των μη έγκυρων χρωμοσωμάτων, δηλαδή αυτών που αντιστοιχούν σε συνολικό όγκο επιλεγμένων αντικειμένων μεγαλύτερο από τη χωρητικότητα του σάκου, θα το αντιμετωπίσουμε με χρήση αρνητικής βαθμολογίας. Ειδικότερα θα ορίσουμε μια συνάρτηση τιμωρίας Pen(x) ως εξής:

$$Pen(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν} \sum_{i=1}^{N} x(i)V(i) < C \\ Pen(3 \cdot (\sum_{i=1}^{N} x(i)V(i) - C)) & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου x(i) η τιμή του i-οστού bit του χρωμοσώματος x και V(i) ο όγκος τους i-οστού αντικειμένου. Η παραπάνω συνάρτηση τιμωρεί τις υπερβάσεις με 3 φορές το ποσό της υπέρβασης. Ως συνάρτηση αξιολόγησης θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση:

$$eval(x) = \sum_{i=1}^{N} x(i)P(i) - Pen(x)$$

Για τη δημιουργία του αρχικού πληθυσμού θα χρησιμοποιήσουμε τους πρώτους 32 αριθμούς. Ειδικότερα, για όσους αριθμούς είναι μικρότεροι από 0.5 το αντίστοιχο bit θα είναι μηδέν, ενώ για όσους αριθμούς είναι μεγαλύτεροι από 0.5 το αντίστοιχο bit θα είναι ένα. Ο αρχικός μας πληθυσμός είναι λοιπόν:

#	Χρωμόσωμα	Όγκος	Αξία χωρίς τιμωρία	Αξία με τιμωρία
1	00011011	16	27	27
2	10110011	24	39	27
3	10111000	21	36	33
4	10000100	12	17	17

Στη συνέχεια πρέπει να σχηματίσουμε 2 ζευγάρια χρωμοσωμάτων. Το άθροισμα των αξιών (με τιμωρία) είναι 104. Επιλέγουμε λοιπόν 4 τυχαίους αριθμούς από το 0 ως το 104 (πολλαπλασιάζοντας τους τέσσερις επόμενους αριθμούς του πίνακα με το 104) και εάν κάποιος από αυτούς είναι στο διάστημα [0,27) επιλέγουμε το #1 χρωμόσωμα, εάν είναι στο [27,54) επιλέγουμε το #2 χρωμόσωμα, εάν είναι στο [54,87) επιλέγουμε το #3 χρωμόσωμα και εάν είναι στο [87,14) επιλέγουμε το #4 χρωμόσωμα. Σε περίπτωση που για κάποιο ζευγάρι επιλεγεί δύο φορές το ίδιο χρωμόσωμα, χρησιμοποιούμε επόμενο τυχαίο αριθμό, μέχρι να επιλεγεί διαφορετικό χρωμόσωμα.
Οι επόμενοι 4 τυχαίοι αριθμοί λοιπόν (πολλαπλασιασμένοι με 104) είναι οι:
0,511992 64,66512 37,13622 86,79424
και τα ζευγάρια χρωμοσωμάτων που σχηματίζονται είναι τα:
1-3
2-3
Για το πρώτο ζευγάρι επιλέγουμε έναν τυχαίο αριθμό από το 0 έως το 9 (πολλαπλασιάζοντας τον επόμενο τυχαίο αριθμό επί 9 και παίρνοντας το ακέραιο μέρος του αποτελέσματος ως θέση διασταύρωσης), που αντιστοιχεί στο σημείο διασταύρωσης (μπορεί η διασταύρωση να γίνει και στα άκρα των χρωμοσωμάτων, γεγονός που σημαίνει ότι οι απόγονοι θα είναι ίδιοι με τους γονείς). Στην προκειμένη περίπτωση ο αριθμός που προκύπτει είναι ο 3,999834, που σημαίνει ότι η διασταύρωση θα γίνει μετά το 3ο bit. Έτσι οι δύο απόγονοι είναι οι:
00011000
10111011
Για κάθε έναν από τους απογόνους εξετάζουμε το ενδεχόμενο να γίνει μετάλλαξη. Έστω ότι η πιθανότητα μετάλλαξης είναι 0.01. Εξετάζουμε τους επόμενους 16 αριθμούς, εάν κάποιος από αυτούς είναι μικρότερος από 0.01 τότε το αντίστοιχο bit αλλάζει τιμή. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, οπότε δεν πραγματοποιείται καμία μετάλλαξη.
Στη συνέχεια επιλέγουμε σημείο διασταύρωσης για το δεύτερο ζευγάρι, το οποίο είναι και πάλι η θέση 3 (τυχαίος αριθμός: 3,294171). Έτσι οι δύο απόγονοι είναι οι:
10111000
10110011
Και πάλι ελέγχουμε την πιθανότητα μετάλλαξης, αλλά στους 16 επόμενους αριθμούς δεν υπάρχει κάποιος μικρότερος από 0.01, οπότε δεν πραγματοποιείται καμία μετάλλαξη. Το νέο σύνολο χρωμοσωμάτων με τα χαρακτηριστικά τους είναι λοιπόν το:

#	Χρωμόσωμα	Όγκος	Αξία χωρίς τιμωρία	Αξία με τιμωρία
1	00011000	8	15	15
2	10111011	29	48	21
3	10111000	21	36	33
4	10110011	24	39	31

Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω πρέπει να συνεχισθεί μέχρις ότου είτε να συγκλίνει ο πληθυσμός είτε να συμπληρωθεί κάποιος προκαθορισμένος αριθμός επαναλήψεων. Σε κάθε περίπτωση ως «λύση» θα επιστραφεί το καλύτερο έγκυρο χρωμόσωμα που συναντήθηκε σε όλες τις γενιές πληθυσμών κατά το τρέξιμο του αλγορίθμου.