Ειδικά Θέματα Θεμελιώσεων της Επιστήμης των Υπολογιστών
-
Διακριτά Μαθηματικά
-
2η Διάλεξη

Διδάσκων: Ελευθέριος Κυρούσης

Σημειώσεις από τον φοιτητή Νούλα Γεώργιο. Παρατηρήσεις στο *noulas@ceid.upatras.gr*

7 Δεκεμβρίου 2011

0.1 Γεννήτριες Συναρτήσεις

Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι ένας τρόπος να 'μετράμε'. Στην διάλεξη αυτή αρχικά θα δούμε με ποιό τρόπο τις χρησιμοποιούμε για να μετράμε.

Αν οι όροι μια ακολουθίας a$_r$, r=1,2,3,... δίνουν τον αριθμό των τρόπων που μπορεί να συμβεί ένα γεγονός που εξαρτάται απο το r , τότε η γεννήτρια συνάρτηση

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

καλείται απαριθμητής του γεγονότος. Για παράδειγμα, η γεννήτρια συνάρτηση

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

είναι ένας απαριθμητής των συνδυασμών (χωρίς επανατοποθέτηση) r αντικειμένων από n αντικείμενα.

Συνήθως για να βρούμε έναν απαριθμητή βρίσκουμε έναν κλειστό τύπο χρησιμοποιώντας συνδυαστικά επιχειρήματα και στην συνέχεια βρίσκουμε την αντίστοιχη δυναμοσειρά. Οι συντελεστές της δυναμοσειράς που βρίσκουμε με αυτόν τον τρόπο μας δίνουν τον αριθμό των τρόπων του γεγονότος που αναφέρεται ο απαριθμητής

0.1.1 Παράδειγμα 1

Δίνεται ένα σύνολο n αντικειμένων. Υπολογίζουμε ποιός είναι ο αριθμός των υποσυνόλων με k στοιχεία.
Γνωρίζουμε ότι αυτό είναι : $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$

Με δυναμοσειρές αυτό αυτό είναι

$(1+x)...(1+x) = (1+x)^n = a_0 + a_1 x + ... + a_k x_k + ... + a_n x_n$

και ο ζητούμενος όρος στην γεννήτρια συνάρτηση ο $a_k = \binom{n}{k}$

0.1.2 Παράδειγμα 2

Δίνεται σύνολο n αντικειμένων. Υπλογίζουμε τον αριθμό των συνδυασμών k στοιχείων όπου επιτρέπονται επαναλήψεις. Ας δούμε την γεννήτρια συνάρτηση για μια εύκολη περίπτωση όπου επιτρέπονται μέχρι 3 επαναλήψεις.

n φορές το: $(1+x+x^2+x^3)....(1+x+x^2+x^3)$

εύκολα αντιλαμβανόμαστε από αυτό ότι στην γενική περίπτωση έχουμε:

$(1+x+x^2+x^3+...)^n = a_n x^k$

Το πρώτο μέλος ισούται με:

$(1+x+x^2+x^3+...)^n = ((1-x)^{-1})^n = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k (-1)^k$

και άρα ο αριθμός των ζητούμενων συνδυασμών είναι : $(-1)^k \binom{-n}{k}$

Αναλύοντας τον προηγούμενο αριθμό έχουμε:

$(-1)^k \binom{-n}{k} = (-1)^k \frac{(-n)(-n-1)(-n-2).....(-n-(k-1))}{k!} = (-1)^k (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2).....(n+(k-1))}{k!} =////$
$\frac{(n+(k-1))....(n+2)(n+1)n}{k!} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)(n+k)...n}{k!}$

0.1.3 Παράδειγμα 3

Δίνεται σύνολο n αντικειμένων. Υπολογίζουμε τον αριθμό των συνδυασμών με k στοιχεία όπου επιτρέπονται άρτιες επαναλήψεις.Κάθε αντικείμενο πρέπει να εμφανιστεί με άρτιο αριθμό στο πλήθος, σε κάθε συλλογή.

Η γεννήτρια συνάρτηση για αυτό είναι:

$(1+x^2+x^4+...)^n = ((1-x^2)^{-1})^n = (1-x^2)^{-n}$ Άρα:

$(1-x^2)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} - \binom{-n}{k} x^{2k} (-1)^k$

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός που βρίσκεται αν κανουμε το άθρισμα στην αρχική του μορφή είναι:

$$\binom{n+\frac{k}{2}-1}{\frac{k}{2}}$$

0.1.4 Παράδειγμα 3

Δίνεται σύνολο n αντικειμένων. Υπολογίζουμε τον αριθμό των συνδυασμών με k στοιχεία όπου επιτρέπονται επαναλήψεις με κάθε αντικείμενο να εμφανίζεται τουλάχστον μία φορα στη συλλογή.

Η γεννήτρια συνάρτηση για αυτό είναι:

$(x+x^2+x^3+...)^n = x^n(1+x+x^2+..) =$

$x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{k+n} =$

Για $n+k=l$

$= \sum_{l-n}^{\infty} \binom{l-1}{l-n} x^l$

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι: $\binom{k-1}{k-n}$

0.2 Διαμερίσεις ακεραίων

Είναι αρκετά ενδιαφέρον να μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των τρόπων που ένας ακέραιος θετικός αριθμός n μπορεί να γραφει σαν άθροισμα άλλων ακεραίων αριθμών, χωρις να μας ενδιαφέρει η σειρά σε αυτά τα αθροίσματα. Ορίζουμε λοιπόν σαν διαμοιρασμούς ενός ακεραίου n $\delta(n)$, τον αριθμό αυτών των αθροισμάτων.

Έχουμε δ(5)=7 αφού 5= 1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+3, 1+2+2, 3+2, 4+1, 5

Αυτό μπουρούμε να το εκφράσουμε ως εξής:

$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2+x^4)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5) =$

$\frac{1-x^6}{1-x} \frac{1-(x^2)^3}{1-x^2} \frac{1-(x^3)^2}{1-x^3} \frac{1-(x^4)^2}{1-x^4} \frac{1-(x^5)^2}{1-x^5} =$

$(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^4)^{-1}(1-x^5)^{-1}$

Για την γενική περίπτωση n με την ίδια διαδικασία θα καταλήγαμε στο:

$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}$

και τότε το $\delta(n)$ θα είναι ο συντελεστής του x^n

0.3 Εκθετικές Γεννήτριες συναρτήσεις

Χρησιμοποιούνται όταν θέλουμε να μετρήσουμε διατάξεις:

Όταν δεν έχουμε επαναλήψεις:

$\binom{n}{k}$ συνδυασμοί

$\binom{n}{k}k!$ διατάξεις

Όταν δεν έχουμε επαναλήψεις:

$\binom{n+k-1}{k}$ συνδυασμοί

$\binom{n+k-1}{k}k!$ διατάξεις-πολλαπλά μετρήματα

0.3.1 Παραδείγματα

Το πρόβλημα $Balls-in-bins$: k σφαίρες μη διακεκριμένες που τις τοποθετούμε σε n διακεκριμένες υποδοχές. Υπολογίζουμε τον αριθμό των συνδυασμών των ρίψεων που είναι:

$\binom{n+k-1}{k}k!$, συνδυασμοί k αντικειμένων από n με επανάληψη

Διατάξεις n αντικειμένων από k με επανάληψη $=$ k διακεκριμένες σφαίρες σε n υποδοχές $= n^k$ διατάξεις.

0.3.2 Σχέσεις που ισχύουν για τις εκθετικές γννήτριεες συναρτήσεις

Ο συντελεστής του $\frac{x^k}{k!}$ στο ανάπτυγμα $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} P(n,k)\frac{x^k}{k!}$ είναι ο αριθμός των μεταθέσεων k αντικειμένων επιλεγμένων απο n αντικείμενα. Αυτό μας οδηγεί να ορίσουμε σαν ΕΚΘΕΤΙΚΗ γεννήτρια συνάρτηση μιας ακολουθίας $a_0, a_1, a_2, ...$ τη σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{x^k}{k!}$ (η ορολογία οφείλεται στο ότι $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$).

Ας κοιτάξουμε τώρα προσεκτικά το γινόμενο της μορφής:

$$(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n \frac{x^k}{k!}$$

Ο συντελεστής του $\frac{x^k}{k!}$ ο οποίος ισούται με $\sum_{q_1!...q_t!=r} \frac{r!}{q_1!...q_t!}$ είναι οι μεταθέσεις r ατικειμένων με απεριόριστη επανατοποθέτηση, λαμβανόμενων από n αντικέιμενα. (Η ποσότητα $\frac{r!}{q_1!...q_t!}$ ισούται με των αριθμό των μεταθέσεων r αντικειμένων που είναι χωρισμένα σε t ομάδες με $q_i (1 \leq i \leq t)$ μη διακεκριμένα στοιχεία n κάθε μία)

Χρήσιμοι τύποι:

$(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...) = e^x$

$(1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + ...) = e^{nx}$ και

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

0.4 Αριθμοί *Stirling*

Έχουμε το εξής πρόβλημα· Θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό τρόπων ρήψης k διακεκριμένων σφαιρών σε n διακεκριμένες υποδοχές.Αρχικού έχουμε την :

$(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, το a_k είναι το ζητούμενο.

Για το πρώτο μέλος της παραπάνω έχουμε ότι ισούται με:

$(e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n(e^x)^{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{i-0}^{\infty}\binom{n}{i}(-1)^i e^{x(n-i)} =$

$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}(-1)^i \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(n-i)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k\frac{x^k}{k!}$

όπου:

$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k = n!S(k,n)$

όπου $S(k,n)$ καλείται αριθμός *Stirling* δεύτερου είδους:

$$S(k,n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k$$

Ο αριθμός *Stirling* δεύτερου είδους συμβολίζεται και με:

$$S(k,n) = \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}$$

και έχει την εξής σημασία: Αριθμός των ρίψεων k διακεκριμένων σφαιρών σε n μη διακεκριμένες υποδοχές με τον περιορισμό ότι υπάρχει τουλάχιστον μία σφαίρα σε κάθε υποδοχή*.

Από αυτό εύκολα καταλαβαίνουμε ότι ο αριθμός ρίψεων k διακεκριμένων σφαιρών σε n διακεκριμένες υποδοχές(αυτό που αρχικώς ψάχναμε) είναι ο:

$$n!S(k,n) = n!\left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k$$

*Έχει την ίδια σημασία:Αριθμός διαμερίσεων ενός συνόλου με k στοιχεία σε n υποσύνολα ξένα ανά 2 και ενω το το συνολό τους είναι n.

0.4.1 Χρήσιμες ισότητες

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$\left\{ {k+1 \atop n+1} \right\} = \left\{ {k \atop n+1} \right\} (n+1) + \left\{ {k \atop n} \right\}$$