Πανεπιστημιο Πατρων
Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Ηλεκτρονικων Υπολογιστων και Πληροφορικης

Ειδικά Θέματα Θεμελιώσεων της Επιστήμης των Υπολογιστών

Καθηγητής:
Λευτερης Κυρουσης

Διάλεξη 1η: 23 Νοεμβρίου 2011

1 Εισαγωγή στις Γεννήτριες Συναρτήσεις

Οι γεννήτριες συναρτήσεις (συντ. Γ.Σ.) αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο μέτρησης. Υπάρχουν προβλήματα στα οποία είναι δύσκολο να εργαζόμαστε με ακολουθίες. Γι΄ αυτό "κωδικοποιούμε" τις ακολουθίες με συναρτήσεις οι οποίες είναι πιο εύκολες στο χειρισμό. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω των δυναμοσειρών, στις οποίες αντιστοιχίζονται οι ακολουθίες.

Έστω η ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \cdots$. Σε αυτή την ακολουθία αντιστοιχεί η γεννήτρια συνάρτηση $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ ή πιο σύντομα

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Οι όροι a_n αποτελούν τους συντελεστές της γεννήτριας. Οι όροι αυτοί σχηματίζουν την ακολουθία $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ και εκφράζουν το πλήθος των αντικειμένων "μεγέθους" n.

Από εδώ ήδη αντιλαμβανόμαστε το λόγο που οι γεννήτριες συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για μέτρηση αντικειμένων. Αν έχω μια γεννήτρια συνάρτηση, μπορώ να πάρω την ακολουθία που αντιστοιχεί στη γεννήτρια αυτή και, αντίστροφα, αν έχω μια ακολουθία μπορώ να σχηματίσω τη γεννήτρια συνάρτησή της. Η αντιστοίχιση αυτή υπάρχει αν ικανοποιείται η απαίτηση για σύγκλιση της δυναμοσειράς[1].

[1] Για λεπτομέρειες και περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με τη σύγκλιση δυναμοσειρών, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο σύγγραμα των Λ.Κυρούσης, Χ.Μπούρας και Π.Σπυράκης "Διακριτά Μαθηματικά"

Παράδειγμα 1.1 *Έστω η συνάρτηση* $f(x) = \frac{1}{1-x}$. *Θέλουμε να γράψουμε τη συνάρτηση αυτή σε μορφή δυναμοσειράς. Θα πρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές* a_n. *Παρατηρούμε πως στο συγκεκριμένο παράδειγμα ισχύει* $a_n = 1, \forall n$. *Επομένως, η δυναμοσειρά θα είναι η* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Αυτό ήταν ένα απλό παράδειγμα μιας συνάρτησης από την οποία λάβαμε μια ακολουθία $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ και στη συνέχεια σχηματίσαμε τη δυναμοσειρά της. Πώς μπορώ να βρω τους συντελεστές a_n της γεννήτριας για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$;

Οι συντελεστές a_r μιας συνάρτησης $f(x)$ δίνονται από τον τύπο:

$$a_r = \frac{f^{(r)}(0)}{r!}$$

Παράδειγμα 1.2 *Έστω η συνάρτηση* $f(x) = (1+x)^3$. *Οι συντελεστές της γεννήτριας υπολογίζονται ως εξής:*

- a_0 : *Για* $x = 0, f(0) = 1$, *άρα* $a_0 = 1$.
- a_1 : *Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της* $f(x)$: $f'(x) = 3(1+x)^2$ *και παίρνουμε την παράγωγο στο σημείο 0. Επομένως,* $f'(0) = 3$ *άρα* $a_1 = \frac{3}{1!} = 3$.
- a_2 : *Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της* $f(x)$: $f''(x) = 6(1+x)$ *και παίρνουμε την παράγωγο στο σημείο 0. Όμοια με πριν,* $f''(0) = 6$ *άρα* $a_2 = \frac{6}{2!} = 3$. *κ.ο.κ.*

Παράδειγμα 1.3 *Έστω η συνάρτηση* $f(x) = ln(1+x)$. *Ακολουθώντας την ίδια λογική με το προηγούμενο παράδειγμα, οι συντελεστές της γεννήτριες υπολογίζονται ως εξής:*

- a_0 : *Για* $x = 0, f(0) = ln(1) = 0$, *άρα* $a_0 = 0$.
- a_1 : *Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της* $f(x)$: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ *και παίρνουμε την παράγωγο στο σημείο 0. Επομένως,* $f'(0) = 1$ *άρα* $a_1 = \frac{1}{1!} = 1$.
- a_2 : *Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της* $f(x)$: $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ *και παίρνουμε την παράγωγο στο σημείο 0.* $f''(0) = -1$ *άρα* $a_2 = \frac{-1}{2!} = -\frac{1}{2}$. *κ.ο.κ.*

Γενικά, για τον όρο a_k *ισχύει:* $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. *Η αντίστοιχη δυναμοσειρά θα είναι η* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ *και πρόκειται για τη σειρά Taylor.*

2 Χρήσιμες σχέσεις και ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων

Στη συνέχεια παραθέτουμε συνοπτικά τις βασικότερες ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων καθώς και μια σειρά από σχέσεις που θα μας φανούν ιδιαιτέρως χρήσιμες στη συνέχεια του μαθήματος.

Γραμμική Ιδιότητα: Έστω οι ακολουθίες $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ και $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ και οι αντίστοιχές τους γεννήτριες συναρτήσεις $A(x)$ και $B(x)$. Επιπλέον, έστω οι σταθερές k, l. Οι γεννήτριες συναρτήσεις των ακολουθιών $k(a_k)_{k=0}^{\infty}$ και $l(b_k)_{k=0}^{\infty}$ θα είναι $kA(x)$ και $lB(x)$ αντίστοιχα. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$k(a_k)_{k=0}^{\infty} + l(b_k)_{k=0}^{\infty}$$

είναι η

$$kA(x) + lB(x)$$

Ιδιότητα Κλίμακας: Έστω η ακολουθία $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ και η αντίστοιχή της γεννήτρια συναρτήση $A(x)$. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$\lambda^k a_k$$

θα είναι η

$$A(\lambda x)$$

Ιδιότητα Ολίσθησης: Έστω η ακολουθία $(a_k)_{k=0}^{\infty}, (a_0, a_1, a_2, ...)$ και η αντίστοιχή της γεννήτρια συναρτήση $A(x)$. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$b_r = a_{r+n}, r = 0, 1, 2, ...$$

θα είναι η

$$B(x) = \frac{A(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r}{x^n}$$

Η ιδιότητα της ολίσθησης δημιουργεί μια νέα ακολουθία b_r από την a_r όπου, οι n πρώτοι όροι της a_r διαγράφονται και η νέα ακολουθία ξεκινάει από τον όρο a_{n+1} της αρχικής μας ακολουθίας.

Ιδιότητα δεξιάς Ολίσθησης: Έστω η ακολουθία $(a_k)_{k=0}^{\infty}, (a_0, a_1, a_2, ...)$ και η αντίστοιχή της γεννήτρια συναρτήση $A(x)$. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$b_r = 0 \text{ για } r = 0, 1, 2, ..., n-1 \text{ και } b_r = a_{r-n} \text{ για } r = n, n+1, n+2, ...$$

θα είναι η

$$B(x) = x^n A(x)$$

Η ιδιότητα της δεξιάς ολίσθησης δημιουργεί μια νέα ακολουθία b_r από την a_r όπου οι n πρώτοι όροι της b_r θα είναι μηδενικά και έπειτα θα έχουμε τους όρους της ακολουίας a_r.

Ιδιότητα Παραγώγισης: Έστω η ακολουθία $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ και η αντίστοιχή της γεννήτρια συναρτήση $A(x)$. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$b_r = r a_r, r = 0, 1, 2, ...$$

θα είναι η

$$B(x) = xA'(x)$$

Ιδιότητα Ολοκληρώματος: Έστω η ακολουθία $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ και η αντίστοιχή της γεννήτρια συναρτήση $A(x)$. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$b_r = \tfrac{a_r}{r+1}$$

θα είναι η

$$B(x) = \tfrac{1}{x} \textstyle\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t$$

Ιδιότητα Συνέλιξης: Έστω οι ακολουθίες $(a_k)_{k=0}^{\infty}, (a_0, a_1, a_2, ...)$ και $(b_k)_{k=0}^{\infty}, (b_0, b_1, b_2, ...)$ και οι αντίστοιχές τους γεννήτριες συναρτήσεις $A(x)$ και $B(x)$. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + ... + a_k b_0$$

θα είναι η

$$C(x) = A(x)B(x)$$

Παράδειγμα 2.1 *Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $1, 1, 1, 1, ...$ είναι η $(1-x)^{-1}$. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ...$ είναι η $(1-2x)^{-1}$ (Ιδιότητα κλίμακας).*

Παράδειγμα 2.2 *Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{sinx}{1-x}$. Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές της γεννήτριας συνάρτησής της θα πρέπει να υπολογίσουμε, αρχικά, τους συντελεστές των $A(x) = sinx$ και $B(x) = (1-x)^{-1}$.*

sinx: $a_0 = sin0 = 0, a_1 = sin'x|_0 = cos0 = 1, a_2 = cos'x|_0 = -sin0 = 0, a_3 = -sin'x|_0 = -cos0 = -1$ *κ.ο.κ.*

$(1-x)^{-1}$: $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, ...$ *Οι συντελεστές* $c_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r} = \frac{k}{2}$ *είναι οι* $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$ *κ.ο.κ. (Ιδιότητα συνέλιξης).*

Παράδειγμα 2.3 *Ποιό είναι το άθροισμα* $\sum_{i=1}^{t} \binom{n-i}{j}$*;*

Στο παράδειγμα αυτό θα θέσουμε $a_{ij} = \binom{n-i}{j}_j$*, δηλαδή, μια ακολουθία ως προς* j*. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας* a_{ij} *είναι η* $(1+x)^{n-i}$*. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας* $\sum_{i=1}^{t} \binom{n-i}{j}$ *που μας ενδιαφέρει είναι η*

$$\sum_{i=1}^{t} (1+x)^{n-i}$$

Με τι ισούται όμως αυτό το άθροισμα;

$$\sum_{i=1}^{t} (1+x)^{n-i} = (1+x)^n \sum_{i=1}^{t} (1+x)^{-i} = (1+x)^n \cdot \frac{1-(1+x)^{-t}}{x} =$$

$$\tfrac{(1+x)^n}{x} - \tfrac{(1+x)^{n-t}}{x},$$

όπου ο όρος $\sum_{i=1}^{t} (1+x)^{-i}$ *είναι άθροισμα γεωμετρικής προόδου.*

Στον παρακάτω πίνακα συγκεντρώνουμε μερικές σχέσεις χρήσιμες για την επίλυση των προβλημάτων του μαθήματος.

Γεωμετρική πρόοδος (άπειρη)	$1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$
Γεωμετρική πρόοδος (πεπερασμένη)	$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
Τύπος του Newton	$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
Γενικευμένος τύπος του Newton	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Διωνυμικός συντελεστής[2]	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1-x)^n$