Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

Πιθανότητα Σφάλματος
για Δυαδική Διαμόρφωση

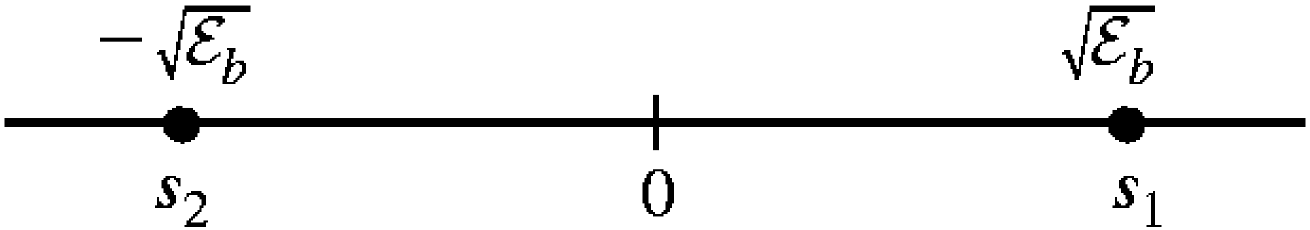
Σύνδεση με τα Προηγούμενα

- Σχεδιάστηκε ο βέλτιστος δέκτης για κανάλι AWGN
- Επειδή πάντοτε υπάρχει ο θόρυβος, ακόμη κι ο βέλτιστος δέκτης κάνει σφάλματα απόφασης ως προς τα σύμβολα που μεταδόθηκαν
- Ερωτήματα:
  - Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα σφάλματος;
  - Από ποιους παράγοντες εξαρτάται;
  - Πώς συγκρίνονται οι διάφορες διαμορφώσεις ως προς την πιθανότητα σφάλματος;
- Στο πλαίσιο αυτού του μαθήματος θα δούμε κάποιες βασικές έννοιες περιοριζόμενοι σε πολύ απλές διαμορφώσεις, όπως:
  - δυαδικά αντίποδα σήματα (π.χ. 2-PAM)
  - δυαδικά ορθογώνια σήματα (π.χ. 2-PPM/2-FSK)

Δυαδικά Αντίποδα Σήματα

- **Θεωρήστε 2-PAM βασικής ζώνης**
- Χαρακτηριστικά:
  - κυματομορφές $s_1(t)=g_T(t)$, $s_2(t)=-g_T(t)$,
  - ενέργεια παλμού=ενέργεια συμβόλου (bit) ➔ $E_g=E_b$
- Ορισμός: Δύο σήματα που είναι αντίθετα μεταξύ τους, $s_1(t)=-s_2(t)$, λέγονται αντίποδα
- Αστερισμός (Μονοδιάστατος χώρος, $M=2$, $N=1$) με συνάρτηση βάσης, στην περίπτωση βασικής ζώνης, την:

$$\boxed{\psi(t)=g_T(t)\big/\sqrt{E_b}\,,\quad 0\le t\le T_b}$$



Αποδιαμόρφωση

- Έστω ότι στάλθηκε το σήμα $s_1(t)$ και ότι τα δύο σύμβολα είναι ισοπίθανα

- Το λαμβανόμενο σήμα $r(t)$ διέρχεται από τον αποδιαμορφωτή (συσχέτισης ή προσαρμοσμένου φίλτρου)

- Έξοδος αποδιαμορφωτή (διάνυσμα διάστασης 1):

$$\boxed{r = s_1 + n = \sqrt{E_b} + n}$$

- n: συνιστώσα θορύβου AWGN,
  - μηδενικής μέσης τιμής
  - διασποράς $\sigma_n^2 = N_0/2$

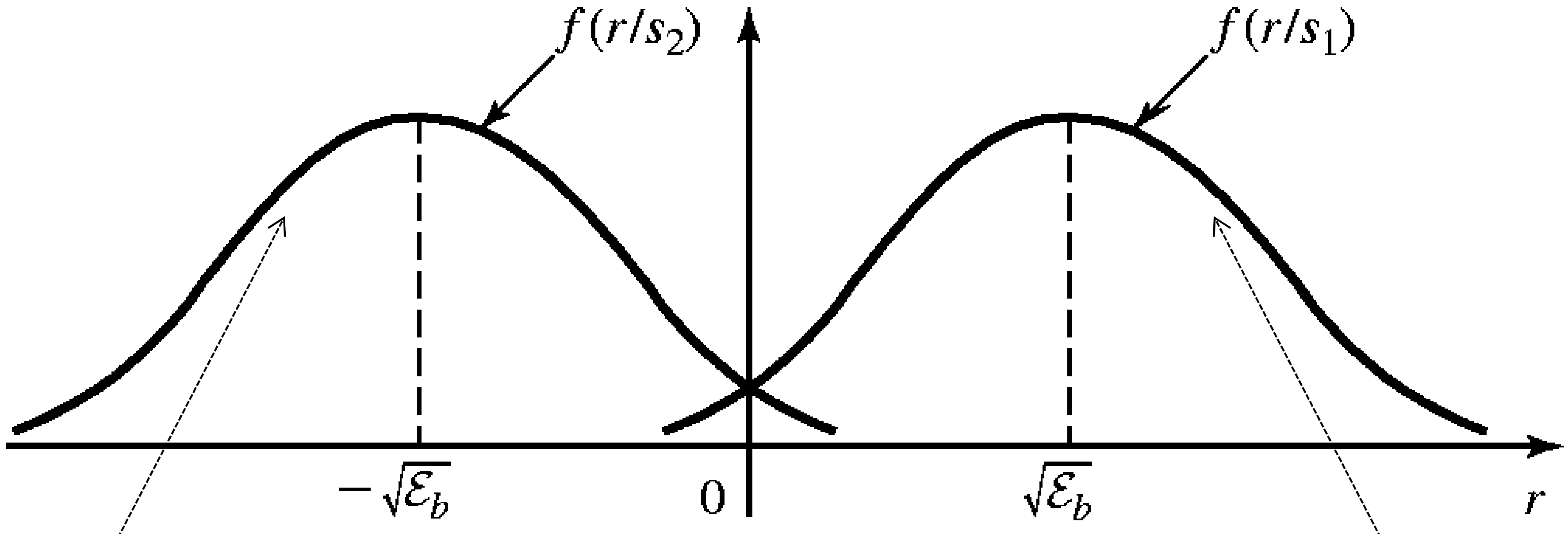
Φώραση

- Ο φωρατής
  - υπολογίζει τις αποστάσεις $D(r,s_1)$ και $D(r,s_2)$
  - επιλέγει το σύμβολο με τη μικρότερη απόσταση
  - περαιτέρω απλοποίηση στο 2-PAM → εξέταση προσήμου

$$\boxed{\begin{array}{l} r>0 \Leftrightarrow D\left(r,s_1\right)<D\left(r,s_2\right)\mapsto s_1 \\ r<0 \Leftrightarrow D\left(r,s_1\right)>D\left(r,s_2\right)\mapsto s_2 \end{array}}$$

- Η τυχαία μεταβλητή *r* ακολουθεί
  - Gaussian κατανομή
  - διασποράς $N_0/2$
  - με μέση τιμή s_1 ή s_2, ανάλογα με το ποιο σύμβολο στάλθηκε

Κατανομή του *r*



$$f\left(r\middle|s_2\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-\frac{\left(r+\sqrt{E_b}\right)^2}{N_0}}$$

$$f\left(r\middle|s_1\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-\frac{\left(r-\sqrt{E_b}\right)^2}{N_0}}$$

- Υπό συνθήκη κατανομές του *r*

Πιθανότητα Σφάλματος 2-PAM

- Περιπτώσεις εσφαλμένης φώρασης
  1. στάλθηκε το s_1 και αποφασίστηκε το s_2
  2. το αντίθετο

- Στην πρώτη περίπτωση μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την πιθανότητα

$$P\left(e\middle|s_1\right)=P\left(r<0\middle|s_1\right)$$

- Από την αντίστοιχη υπό συνθήκη pdf, ισχύει

$$P\left(e\middle|s_1\right)=\int_{-\infty}^{0} f\left(r\mid s_1\right)dr=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\left(r-\sqrt{E_b}\right)^2 / N_0}dr$$

Πιθανότητα Σφάλματος 2-PAM (2)

- $$P\left(e|s_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\sqrt{2E_b/N_0}} e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{2E_b/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$$
  $$=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- Η συνάρτηση Q(x) ορίζεται ως η πιθανότητα «ουράς» μιας τυπικής κανονικής κατανομής N(0,1) (δηλαδή η πιθανότητα η τ.μ. να είναι μεγαλύτερη από το όρισμα *x*)

$$Q\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-t^2/2}dt$$

$$Q\left(-\infty\right)=1,\quad Q\left(0\right)=\frac{1}{2},\quad Q\left(\infty\right)=0,$$

Πιθανότητα Σφάλματος 2-PAM (3)

- Λόγω συμμετρίας του προβλήματος, η άλλη περίπτωση σφάλματος εμφανίζεται με την ίδια πιθανότητα

$$P\left(e\middle|s_2\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- Επειδή τα δύο σύμβολα είναι ισοπίθανα, η μέση πιθανότητα σφάλματος bit (συμβόλου) είναι

$$P_b = \frac{1}{2}P\left(e\middle|s_1\right) + \frac{1}{2}P\left(e\middle|s_2\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Παρατηρήσεις

1. Ορισμός: Ο λόγος E_b/N_0 καλείται
   - λόγος σήματος-προς-θόρυβο ανά bit
   - signal-to-noise ratio per bit (SNR/bit)

2. Η πιθανότητα σφάλματος σε κανάλια AWGN εξαρτάται μόνο από το SNR

3. Η τιμή $2E_b/N_0$ είναι επίσης και το SNR εξόδου του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένου φίλτρου

4. Εφόσον η απόσταση των δύο σημείων είναι $d_{12} = 2\sqrt{E_b}$
   - η πιθανότητα σφάλματος γράφεται και ως

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right)$$

Δυαδικά Ορθογώνια Σήματα

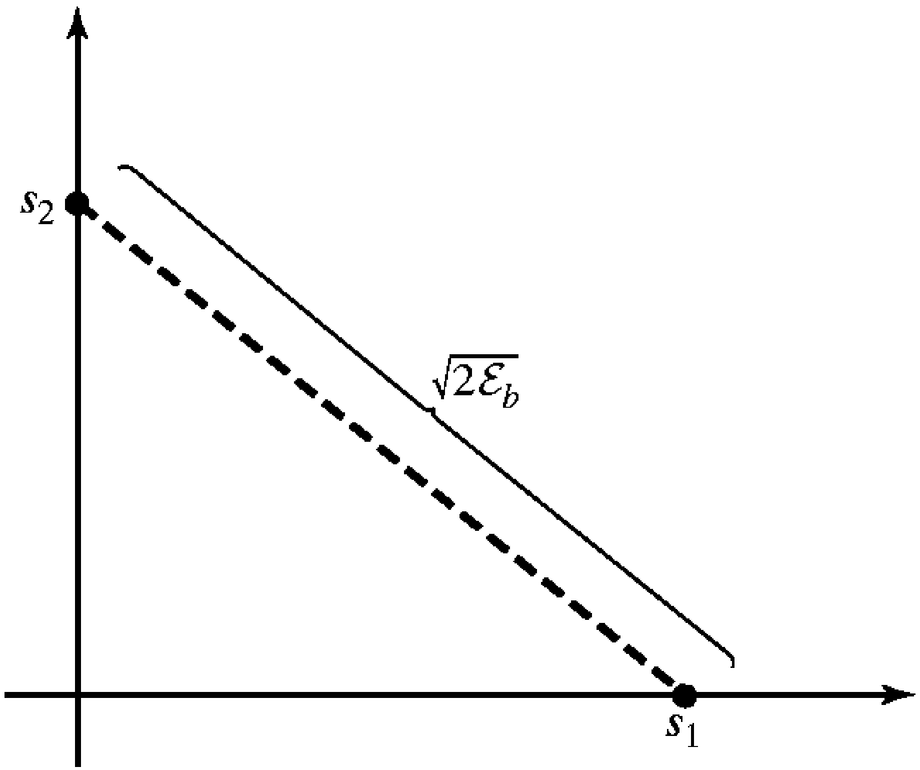
- Ορισμός: δύο σήματα $s_1(t)$, $s_2(t)$ λέγονται ορθογώνια όταν

$$\boxed{\int s_1(t) s_2(t) dt = 0}$$

- Αστερισμός (Δισδιάστατος χώρος, $N=M=2$): π.χ. 2-PPM, 2-FSK
- Διανύσματα σήματος

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{E_b} & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{E_b} \end{bmatrix}^T$$

- Ενέργεια E_b
- Απόσταση σημείων: $\boxed{\sqrt{2E_b}}$



Πιθανότητα Σφάλματος 2-PPM

- Υποθέσεις:
  - τα δύο σύμβολα είναι ισοπίθανα
  - έστω τώρα ότι στάλθηκε το σύμβολο s_1

- Έξοδος αποδιαμορφωτή

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sqrt{E_b} + n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

- Περιπτώσεις εσφαλμένης απόφασης:
  1. στάλθηκε το s_1 και αποφασίστηκε το s_2
  2. το αντίθετο

Πιθανότητα Σφάλματος 2-PPM (2)

- Στην πρώτη περίπτωση, αναζητούμε την πιθανότητα

$$P\left(e\middle|\mathbf{s}_1\right) = P\left(\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_1\right\|^2 > \left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_2\right\|^2 \middle| \mathbf{s}_1\right) \equiv P\left(C(\mathbf{r},\mathbf{s}_2) > C(\mathbf{r},\mathbf{s}_1)\middle|\mathbf{s}_1\right)$$
$$= P\left(n_2 > \sqrt{E_b} + n_1\right) = P\left(n_2 - n_1 > \sqrt{E_b}\right)$$

- Όπου χρησιμοποιήθηκε η μετρική συσχέτισης $C(\mathbf{r},\mathbf{s}_m) = 2\mathbf{r}^T\mathbf{s}_m - \|\mathbf{s}_m\|^2$

- Ελάχιστη Απόσταση $\equiv$ Μέγιστη Συσχέτιση

$$\min_{\mathbf{s}_m}\left(\|\mathbf{r}\|^2 - 2\mathbf{r}^T\mathbf{s}_m + \|\mathbf{s}_m\|^2\right) \equiv \max_{\mathbf{s}_m}\left(2\mathbf{r}^T\mathbf{s}_m - \|\mathbf{s}_m\|^2\right)$$

- Η διαφορά *(n_2-n_1)* είναι
  - Gaussian τ.μ.
  - μηδενικής μέσης τιμής
  - και με διασπορά
  - N_0, δηλαδή διπλάσια των επιμέρους διασπορών

Πιθανότητα Σφάλματος 2-PPM (3)

- Η πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P\left(n_2 - n_1 > \sqrt{E_b}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_{\sqrt{E_b}}^{\infty} e^{-x^2/2N_0} dx$$
$$= Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- Στην αντίθετη περίπτωση εσφαλμένης φώρασης προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα

- Αν τα σύμβολα είναι ισοπίθανα, η μέση πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Σύγκριση Δυαδικών Σημάτων

- Δυαδικά Αντίποδα
  - 2-PAM
  - 2-PSK

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

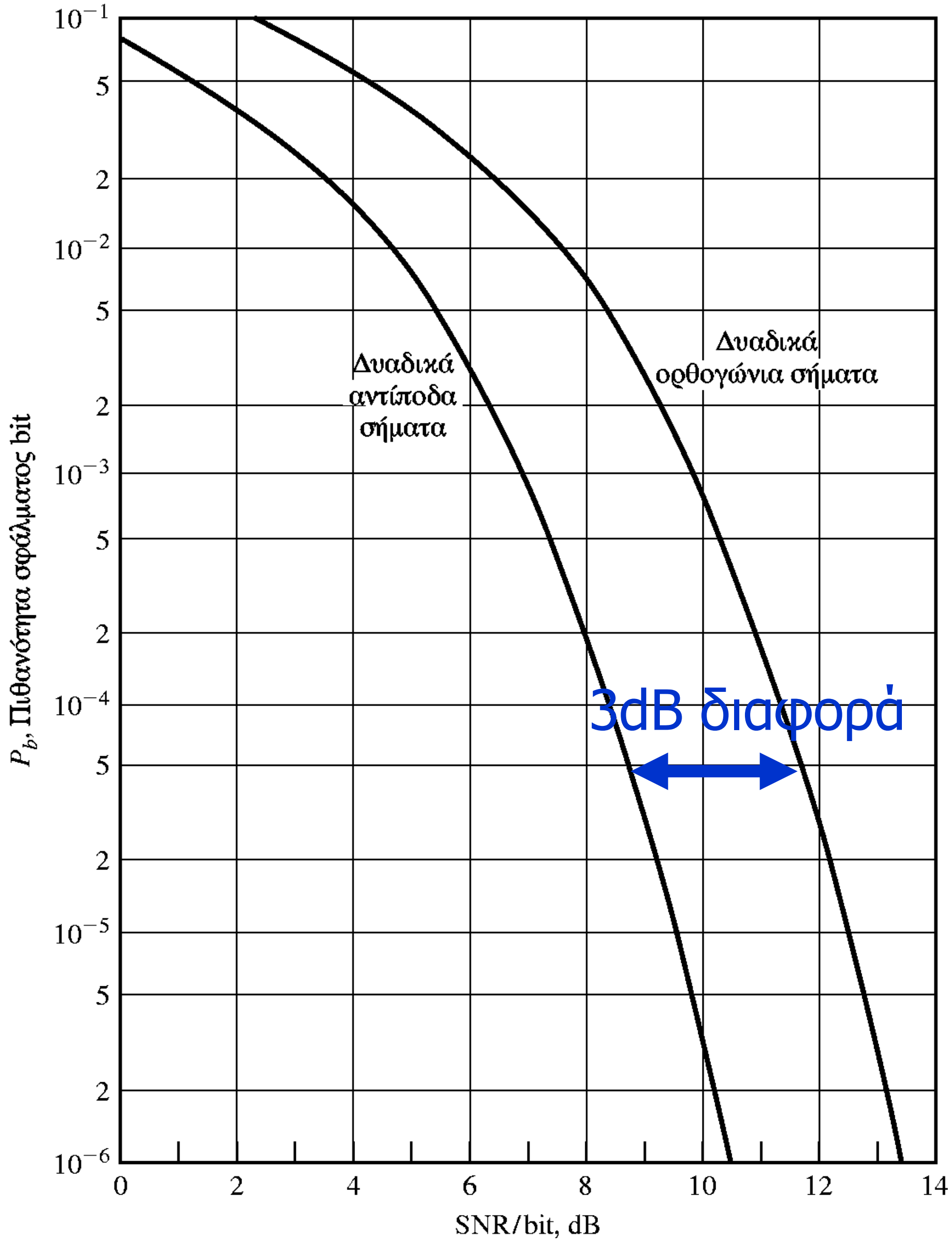
- Δυαδικά Ορθογώνια
  - 2-FSK
  - 2-PPM

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Ποια διαμόρφωση προσφέρει μικρότερη πιθανότητα σφάλματος;

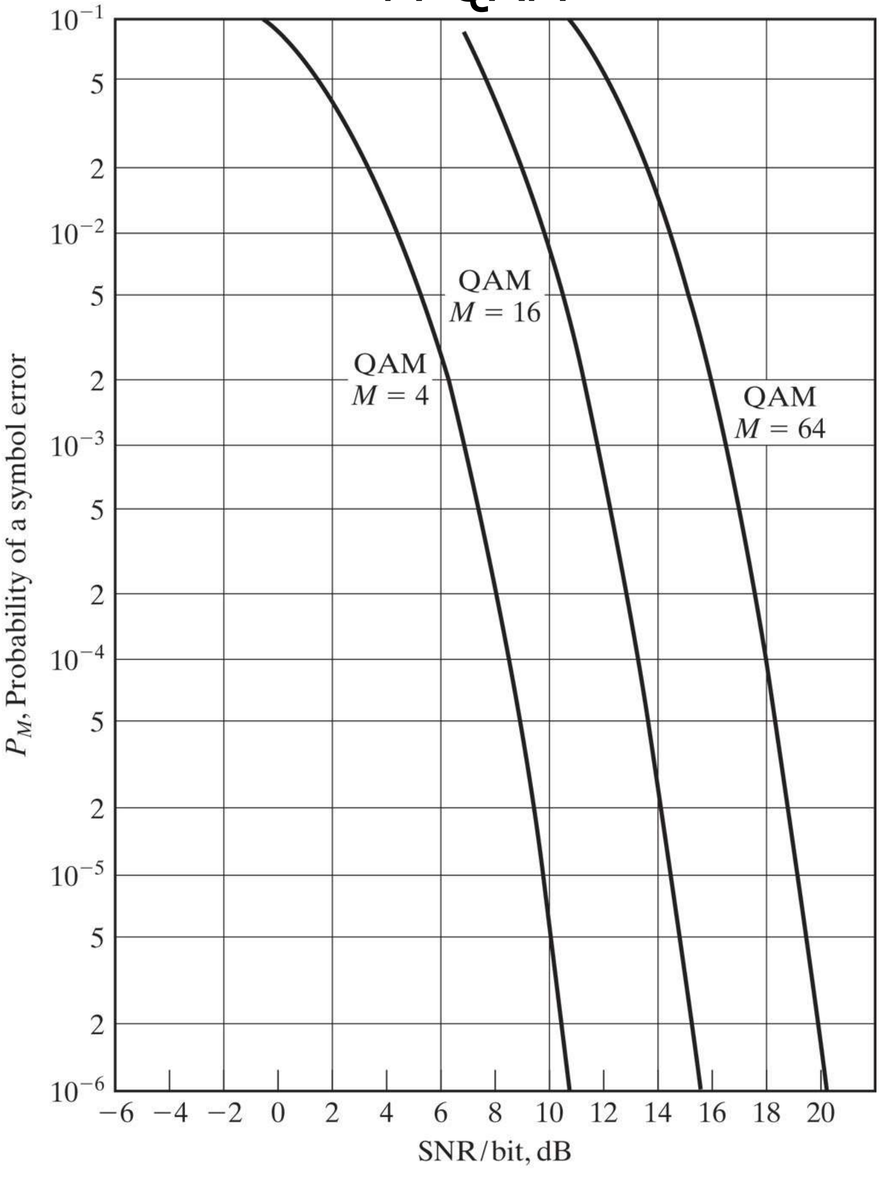
- Ως προς την πιθανότητα σφάλματος, τα δυαδικά αντίποδα είναι προτιμότερα
- Τα ορθογώνια απαιτούν διπλάσιο SNR για να πετύχουν την ίδια πιθανότητα σφάλματος
- Διπλάσιο SNR → Διπλάσια ισχύς εκπομπής
- Επειδή $10\log_{10}2=3$, τα δύο SNR εκφρασμένα σε [dB] διαφέρουν κατά 3dB

BER συναρτήσει του SNR

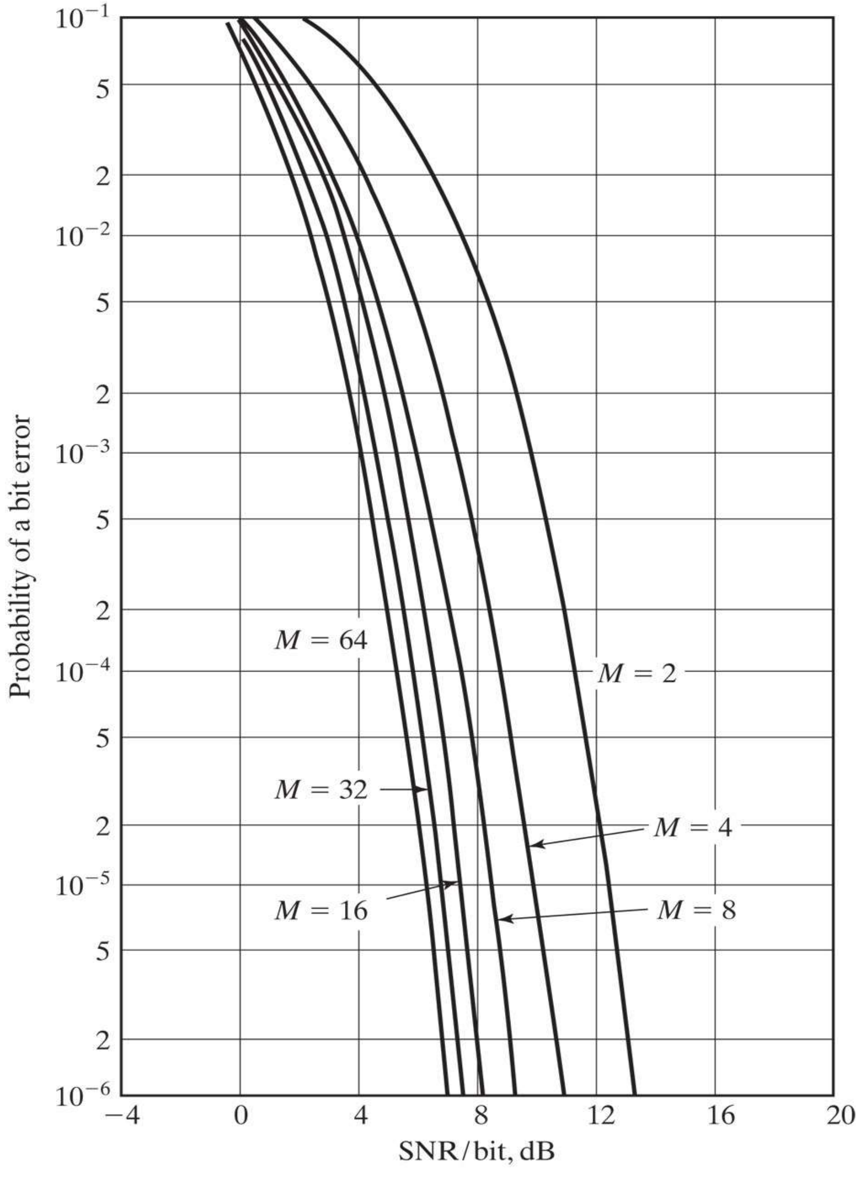


M-αδικα Αντίποδα vs Ορθογώνια

M-QAM

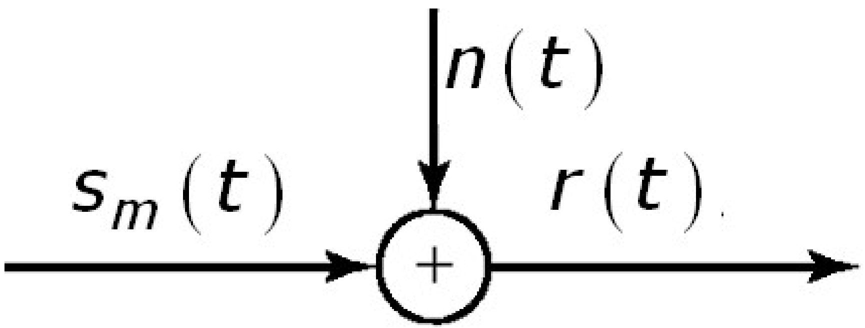


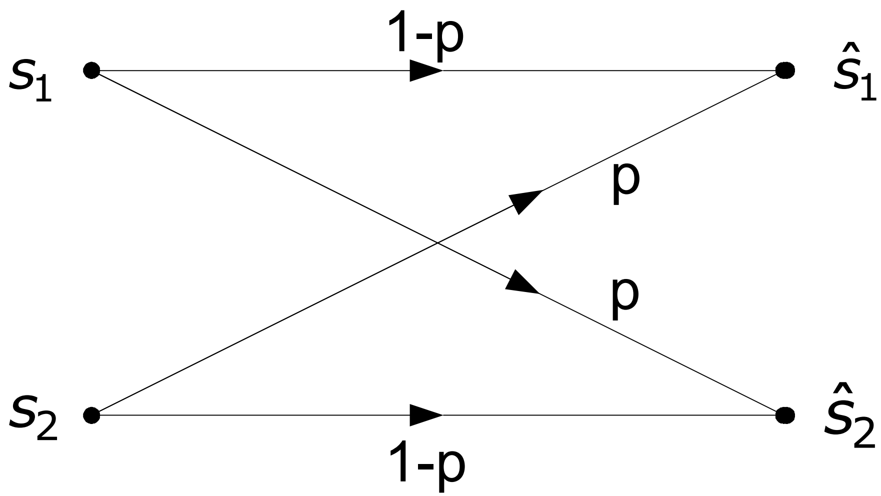
M-FSK



Μοντελοποίηση ως BSC

- Η ψηφιακή μετάδοση δυαδικής πληροφορίας μέσω ενός καναλιού AWGN
  - είτε με δυαδική αντίποδη σηματοδοσία,
  - είτε με δυαδική ορθογώνια σηματοδοσία,
  - μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Binary Symmetric Channel



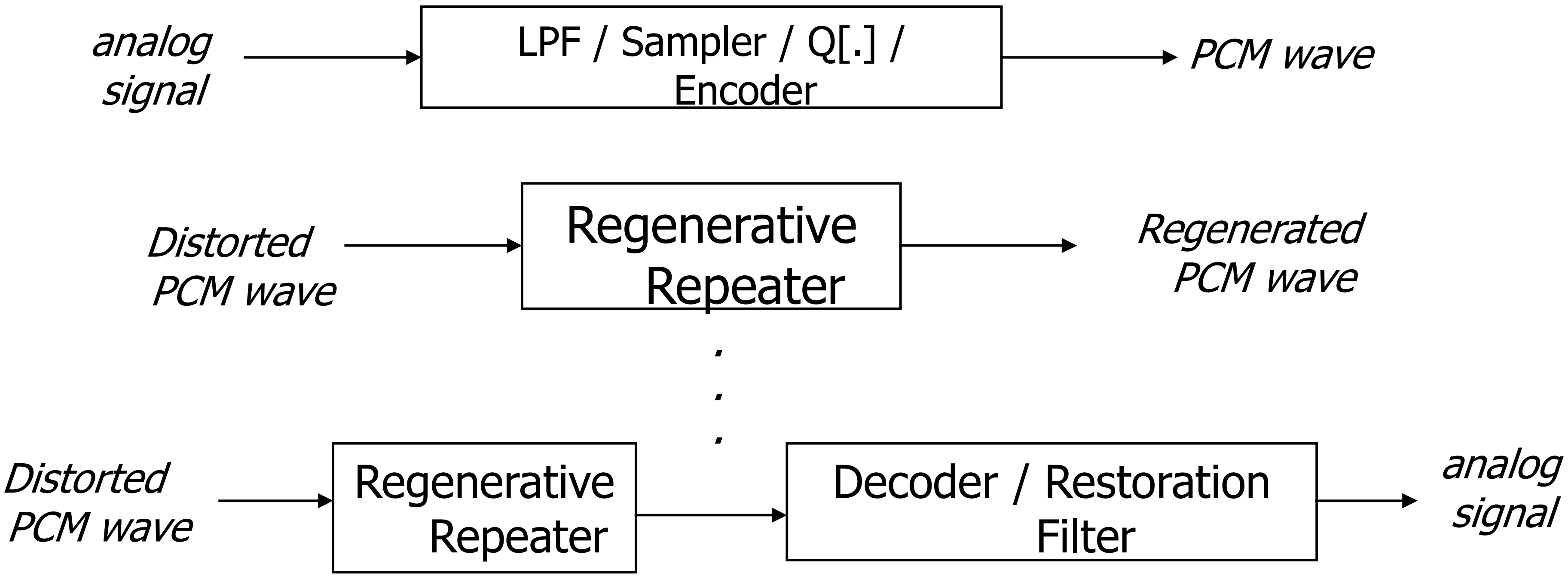


- Με πιθανότητα εσφαλμένης μετάδοσης

$$\boxed{p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)} \quad \text{ή} \quad \boxed{p = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

Αναγεννητικοί Επαναλήπτες

Ένα από τα πλέον σημαντικά χαρακτηριστικά των ψηφιακών τηλεπικοινωνιακών συστημάτων είναι η ικανότητά τους να ελέγχουν τις επιδράσεις της παραμόρφωσης καναλιού και του θορύβου μέσω της χρήσης αναγεννητικών επαναληπτών (regenerative repeaters).



Στην περίπτωση των αναγεννητικών επαναληπτών η πιθανότητα σφάλματος αυξάνεται K φορές, ενώ στη περίπτωση των αναλογικών επαναληπτών η πιθανότητα σφάλματος είναι αυτή που αντιστοιχεί σε SNR μειωμένο κατά K φορές.