Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

Πολυδιάστατες Κυματομορφές Σήματος

Ανακεφαλαίωση

- Καθένα από τα M σύμβολα αντιστοιχίζεται σε μια αναλογική κυματομορφή

- Οι κυματομορφές ορίζονται σε ένα N-D χώρο σήματος *($N \leq M$)*

- Μονοδιάστατα Σήματα (ευθεία)
  - PAM

- Δισδιάστατα Σήματα (επίπεδο)
  - PSK
  - QAM

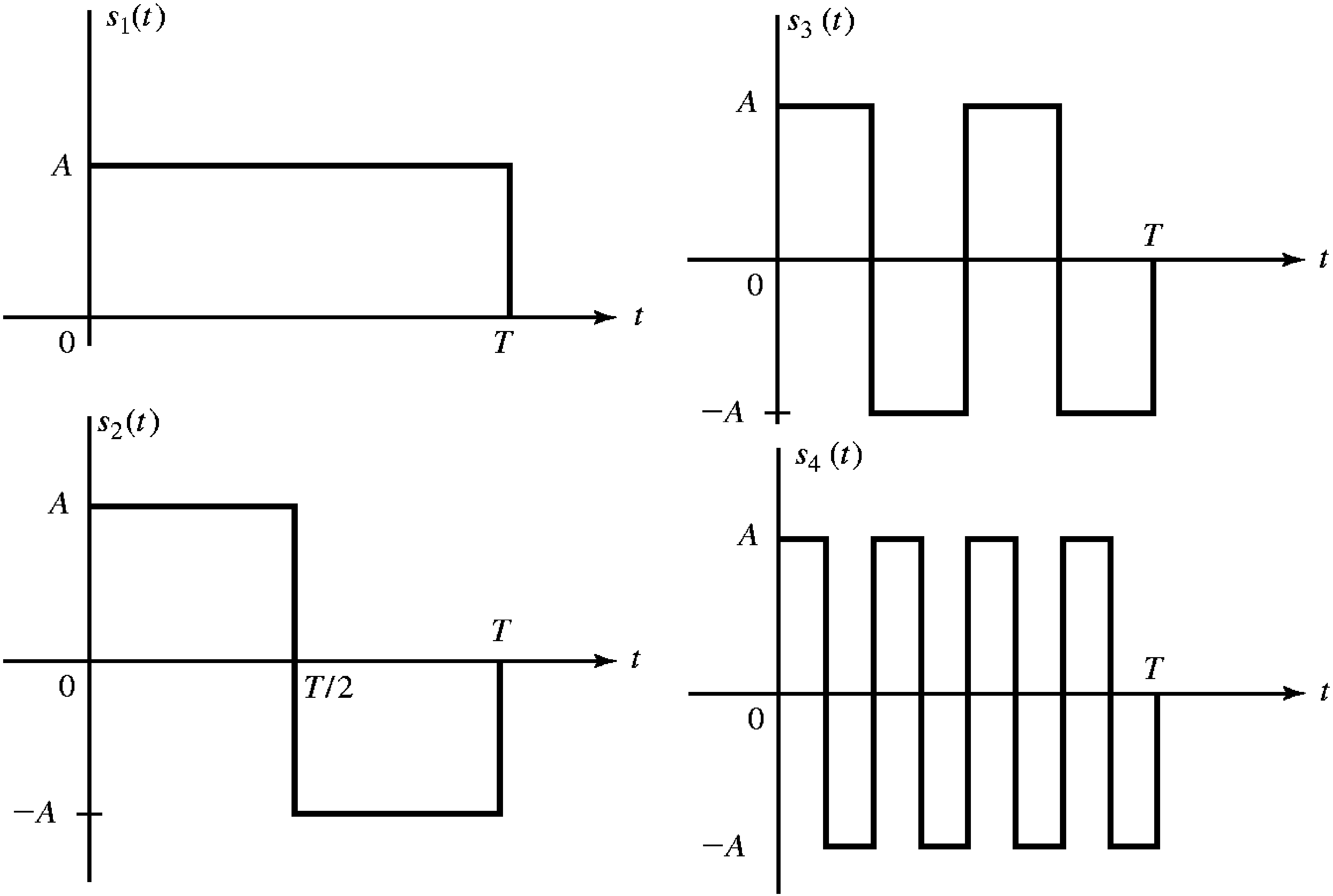
- Πολυδιάστατα Σήματα (N-D χώρος)
  - θα περιοριστούμε σε <u>αμοιβαία ορθογώνιες κυματομορφές</u> (επομένως $N=M$)

N-D Ορθογώνιες Κυματομορφές Βασικής Ζώνης

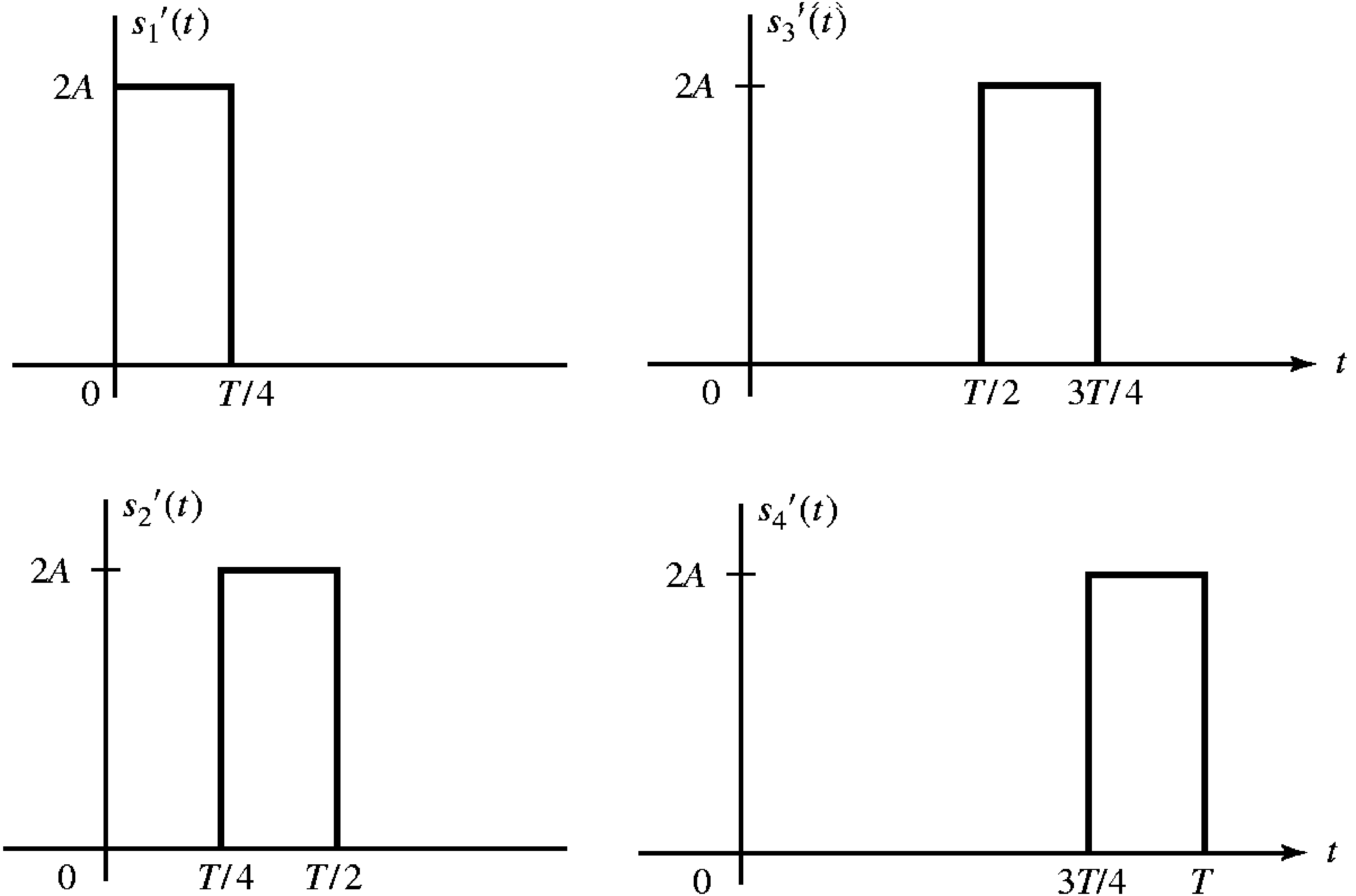
- Μπορούν να κατασκευαστούν με διάφορους τρόπους
- Μπορεί να επικαλύπτονται στο χρόνο ή όχι
- Μπορεί να έχουν ίση ή διαφορετική ενέργεια,
  - αλλά για πρακτικούς λόγους επιλέγονται ίσης ενέργειας
- Μπορούν να παραχθούν με τη διαδικασία Gram-Schmidt
- ή και άλλους τρόπους
- Παράδειγμα: οι ακολουθίες Hadamard που παράγονται αναδρομικά όπως παρακάτω και δημιουργούν πίνακα με ορθογώνιες στήλες

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_n & \mathbf{H}_n \\ \mathbf{H}_n & -\mathbf{H}_n \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1

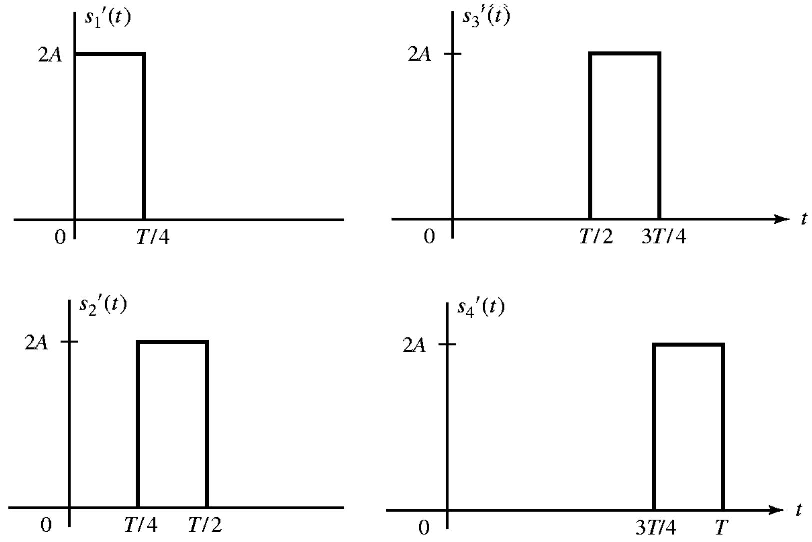


Παράδειγμα 2



Pulse Position Modulation (PPM)

- Στο δεύτερο παράδειγμα, η ψηφιακή πληροφορία αποτυπώνεται στη θέση που τοποθετείται ο παλμός



- Η ιδιαίτερη αυτή σηματοδοσία καλείται
  - διαμόρφωση παλμών κατά θέση (Pulse Position Modulation - PPM)

- Τα σήματα βασικής ζώνης δίνονται ως

$$s_m(t) = Ag_T\left(t-(m-1)T/M\right), \qquad m=1,\ldots,M$$
$$(m-1)T/M \le t \le mT/M$$

- Ο παλμός $g_T(t)$ έχει διάρκεια T/M και κατάλληλο σχήμα

Γεωμετρική Αναπαράσταση PPM

- Όλα τα σήματα PPM είναι ίσης ενέργειας

$$E_s = \int_0^T s_m^2(t)\,dt = A^2 E_g$$

- *M* συναρτήσεις βάσεις

$$\psi_m(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{E_g}} g_T\left(t-(m-1)T/M\right), & (m-1)T/M \le t \le mT/M \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

- Στο χώρο σημάτων οι Μ-αδικές κυματομορφές PPM αναπαρίστανται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \begin{bmatrix} A\sqrt{E_s} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ &\vdots \\ \mathbf{s}_M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A\sqrt{E_s} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

Γεωμετρική Αναπαράσταση PPM (2)

- Όλα τα διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους

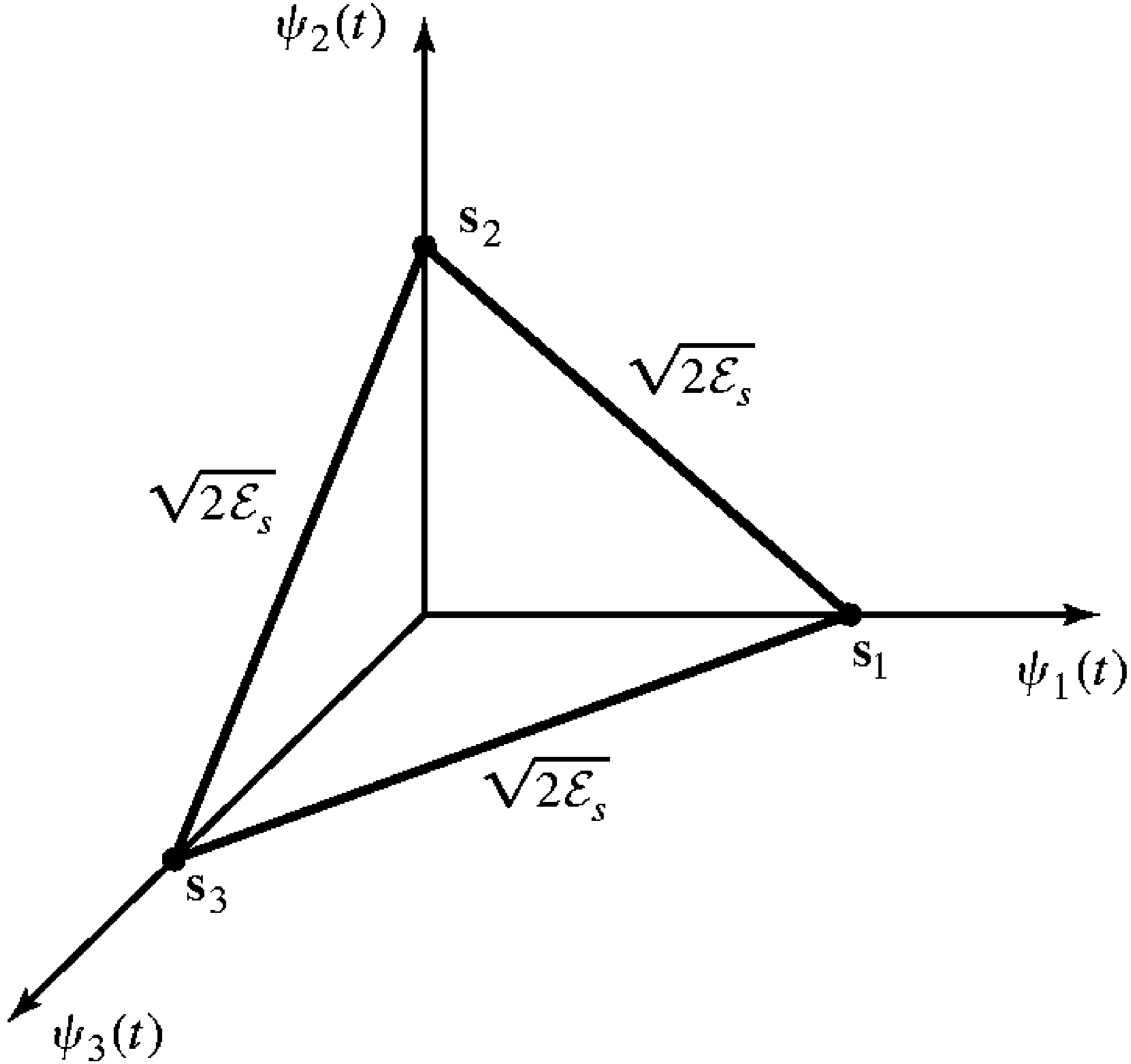
- Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στον M-D χώρο είναι

$$d_{mn} = \sqrt{\left|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n\right|^2} = A\sqrt{2E_s}$$

- Ερώτηση (γενικά για N-D συστήματα διαμόρφωσης):
  Έχει νόημα η κωδικοποίηση Gray;

- Όχι, διότι όλα τα σημεία είναι ισαπέχοντα

Παράδειγμα



- Γεωμετρική αναπαράσταση ορθογώνιων σημάτων $M=N=3$, $A=1$

N-D Ορθογώνια Ζωνοπερατά Σήματα

Παράγονται κατά το γνωστό τρόπο
- τα αντίστοιχα σήματα βασικής ζώνης διαμορφώνουν ένα φέρον

$$u_m(t) = s_m(t)\cos(2\pi f_c t)$$

- Ορθογωνιότητα

$$\int_0^T u_m(t)u_n(t)\,dt =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^T s_m(t)s_n(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T s_m(t)s_n(t)\cos 4\pi f_c t\,dt \overset{f_c >> 1/T}{=} 0$$

- Η ενέργεια της ζωνοπερατής κυματομορφής είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης κυματομορφής βασικής ζώνης

Frequency Shift Keying (FSK)

- M-PPM:
  - επιτυγχάνουν ορθογωνιότητα στο πεδίο του χρόνου
  - μέσω μη επικαλυπτόμενων παλμών
- Εναλλακτική Λύση:
  - ορθογωνιότητα στο πεδίο των συχνοτήτων
  - με διαμόρφωση κατά συχνότητα φέροντος
- Η απλούστερη μορφή είναι
  - η μεταλλαγή ολίσθησης συχνότητας

    (frequency shift keying - FSK)

Δυαδικό FSK

- Είναι το απλούστερο FSK
- Χρησιμοποιούνται δύο φέροντα σήματα
  - με συχνότητες f_1, f_2 με $\Delta f = f_2 - f_1$
  - για μετάδοση δυαδικής πληροφορίας

- Κυματομορφές Σήματος:

$$u_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos 2\pi f_1 t, \quad 0 \le t \le T_b$$

$$u_2(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos 2\pi f_2 t, \quad 0 \le t \le T_b$$

- Η συχνοτική απόσταση Δf επιλέγεται ώστε να επιτευχθεί ορθογωνιότητα

M-αδικό FSK

- Μεταδίδονται $k=log_2M$ bits/σύμβολο
- Κυματομορφές

$$u_m(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos 2\pi\left(f_c+m\Delta f\right)t,$$
$$m=0,\ldots,M-1,\ \ 0\le t\le T$$

- $E_s=kE_b$, ενέργεια συμβόλου
- $T=kT_b$, περίοδος συμβόλου
- $\Delta f=f_m-f_{m-1}$, απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών συχνοτήτων (και πάλι η Δf είναι επιλεγμένη έτσι ώστε όλες οι κυματομορφές να είναι ορθογώνιες μεταξύ τους)
- Όλες οι κυματομορφές έχουν την ίδια ενέργεια E_s

Γεωμετρική Αναπαράσταση M-FSK

- Αντίστοιχη του M-PPM
- Συναρτήσεις βάσεις

$$\psi_m(t) = \sqrt{2/T}\cos 2\pi\left(f_c + m\Delta f\right)t$$

- Διανύσματα

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{E_s} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{s}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{E_s} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

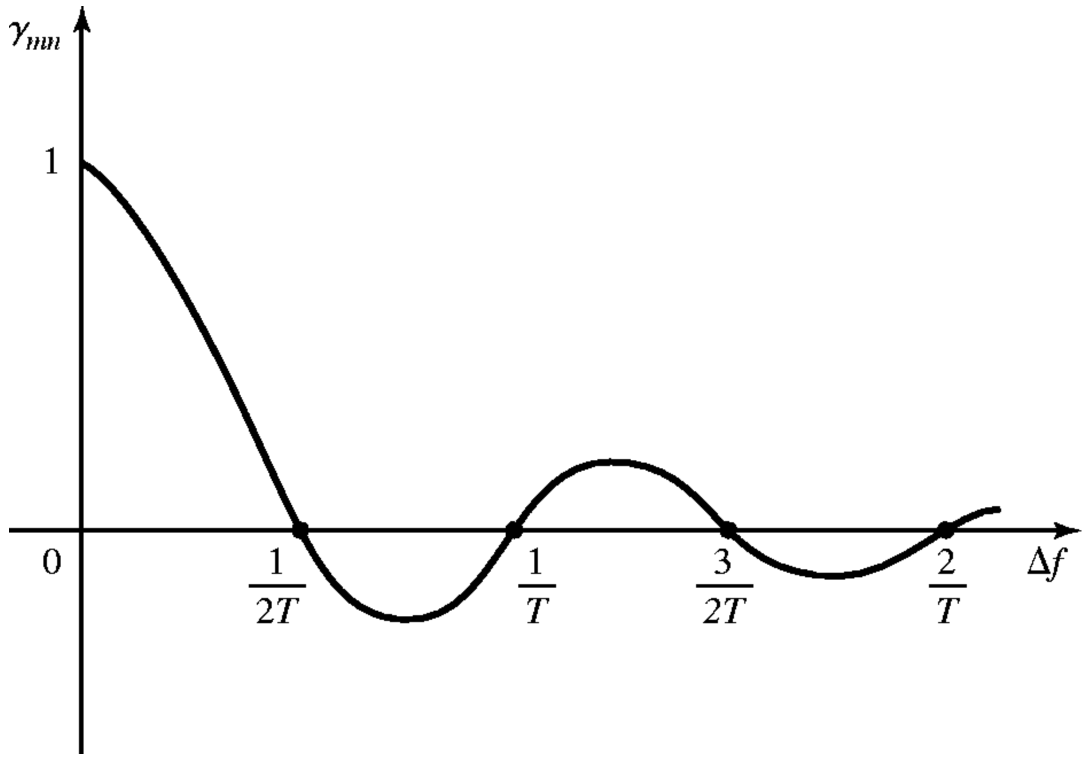
- Ίση απόσταση μεταξύ όλων των διανυσμάτων

$$d_{\min} = \sqrt{2E_s}$$

Συντελεστής Διασυσχέτισης

- Ως μέτρο ομοιότητας δύο κυματομορφών M-δικού FSK είναι ο λεγόμενος συντελεστής διασυσχέτισης

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{E_s}\int_0^T u_m(t)u_n(t)dt = \frac{\sin(2\pi(m-n)\Delta f \cdot T)}{2\pi(m-n)\Delta f \cdot T}$$



Συντελεστής Διασυσχέτισης (2)

Παρατηρήσεις:

1. Οι κυματομορφές είναι ορθογώνιες όταν το Δf είναι πολλαπλάσιο του $1/(2T)$
2. Δηλαδή, το ελάχιστο Δf για ορθογωνιότητα είναι $1/(2T)$
3. Για $\Delta f=1/(2T)$ το μεταδιδόμενο σήμα εμφανίζει ασυνέχειες της φάσης στα όρια των συμβόλων
   - οδηγούν σε άπλωμα του φάσματος
4. Η τιμή $\Delta f=1/T$ είναι η ελάχιστη που επιτυγχάνει ταυτόχρονα
   - ορθογωνιότητα μεταξύ φερουσών
   - και επίσης συνέχεια φάσης

   ωστόσο απαιτείται διπλάσιο εύρος ζώνης

   > Ειδικές μορφές FSK μπορούν να επιτύχουν συνέχεια φάσης ακόμη και με $\Delta f=1/(2T)$