Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

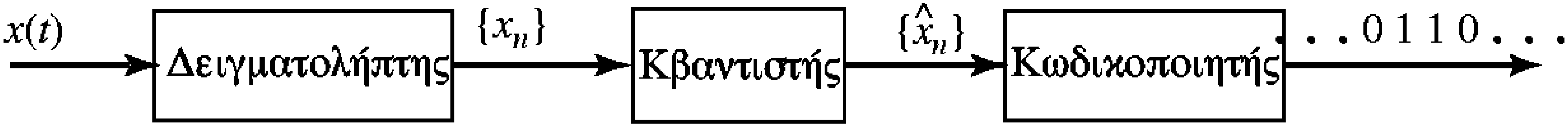
Κωδικοποίηση Κυματομορφής

Σύνδεση με τα Προηγούμενα

- Οι τεχνικές κωδικοποίησης αναλογικής πηγής διακρίνονται σε
  - τεχνικές κωδικοποίησης κυματομορφής
  - τεχνικές ανάλυσης – σύνθεσης
- Οι κωδικοποιητές κυματομορφής
  - δεν εξετάζουν τον τρόπο παραγωγής της κυματομορφής
  - είναι απλούστεροι
  - είναι ανθεκτικοί (robust)
  - χρησιμοποιούνται για ένα μεγάλο εύρος πηγών
- Από αυτές θα μελετήσουμε
  - παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM)
    - » ομοιόμορφη και μη
  - διαφορική PCM (DPCM)
  - διαμόρφωση Δέλτα (DM)
    - » προσαρμοστική DM (ADM)

Παλμοκωδική Διαμόρφωση

- Pulse Code Modulation (PCM): το απλούστερο και παλαιότερο σχήμα κωδικοποίησης κυματομορφής



- Αποτελείται από τα εξής υποσυστήματα:
  1. Δειγματολήπτης
  2. Κβαντιστής
  3. Κωδικοποιητής

PCM: Βασικά Τμήματα

1. Δειγματολήπτης
   - Αρχικά εφαρμόζεται αναλογικό φίλτρο με εύρος ζώνης *W* ώστε να αποφευχθούν φαινόμενα αναδίπλωσης
   - Συχνότητα δειγματοληψίας υψηλότερη της Nyquist (υπερδειγματοληψία)
   - <u>Αναλογικό σήμα πηγής → σήμα διακριτού χρόνου</u>

2. Κβαντιστής
   - <u>Συνεχές → Διακριτό αλφάβητο</u>
   - Χρησιμοποιείται βαθμωτός κβαντιστής
   - Ομοιόμορφος ή μη ομοιόμορφος
     (ανάλογα με τα στατιστικά χαρακτηριστικά της πηγής)

3. Κωδικοποιητής
   - <u>Κβαντισμένες τιμές → (κάποια) δυαδική αναπαράσταση</u>
   - Αν χρησιμοποιούνται *n* bits/έξοδο, επιτρέπονται 2^n στάθμες κβάντισης

Ομοιόμορφο PCM

- Χρησιμοποιείται ομοιόμορφος βαθμωτός κβαντιστής με τιμές κβάντισης να είναι τα κέντρα των περιοχών κβάντισης
- Δυναμική περιοχή σήματος $[-x_{max}, x_{max}]$
- N στάθμες σήματος
- Απαιτούνται $n = log_2 N$ *bits/έξοδο*

  (n = ceiling($log_2 N$) αν το N δεν είναι δύναμη του 2)
- Εύρος κάθε περιοχής

$$\Delta = \frac{2x_{\max}}{N} = \frac{x_{\max}}{2^{n-1}}$$

- Σφάλμα Κβάντισης $\tilde{x} = x - Q(x)$

Θόρυβος Κβάντισης

- Αν υποθέσουμε ότι:

  α) χρησιμοποιούμε πολλές περιοχές κβάντισης,
  β) το εύρος *Δ* είναι μικρό,
  γ) η δυναμική περιοχή εισόδου είναι μικρή,

- Τότε ο θόρυβος κβαντισμού μπορεί να θεωρηθεί
  - ομοιόμορφα κατανεμημένος στο (*-Δ/2,Δ/2*]
  - *ασυσχέτιστος με το σήμα εισόδου*
  - *με μεγάλη μεταβλητότητα και εύρος ζώνης (όπως με τον θερμικό θόρυβο)*

- Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}\right)=\frac{1}{\Delta}, \quad -\frac{\Delta}{2}\leq\tilde{x}\leq\frac{\Delta}{2}$$

- Ισχύς Θορύβου Κβαντισμού

$$E\left[\tilde{X}^2\right]=\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2}\frac{1}{\Delta}\tilde{x}^2 d\tilde{x}=\frac{\Delta^2}{12}=\frac{x_{\max}^2}{3N^2}$$

SQNR Ομοιόμορφου PCM

- Λόγος Σήματος προς Θόρυβο Κβαντισμού (SQNR)

$$SQNR = \frac{E\left[X^2\right]}{E\left[\tilde{X}^2\right]}$$

- Κανονικοποιημένο σήμα εισόδου $\breve{X} = \dfrac{X}{x_{\max}}$

- Ισχύς $E\left[\breve{X}^2\right] = \dfrac{E\left[X^2\right]}{x_{\max}^2}$

$$E\left[\tilde{X}^2\right] = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_{\max}^2}{3N^2}$$

- Αντικαθιστώντας την έκφραση για το $E\left[\tilde{X}^2\right]$ προκύπτει

$$SQNR = 3N^2 E\left[\breve{X}^2\right] = 3 \cdot 4^n E\left[\breve{X}^2\right]$$

n=$log_2 N$

SQNR Ομοιόμορφου PCM (2)

- Λόγω κανονικοποίησης

$$\boxed{\left|\breve{X}\right| \leq 1 \Rightarrow E\left[\breve{X}^2\right] \leq 1}$$

- Οπότε προκύπτει το άνω όριο του SQNR $\boxed{SQNR \leq 3 \cdot 4^n}$

- Διαπίστωση:
  - Το SQNR τείνει στο άνω φράγμα όταν X τείνει στο x_{max}
  - όταν όμως αυξάνεται η δυναμική περιοχή (αύξηση x_{max}) χωρίς να αυξάνεται η διασπορά του σήματος, δηλαδή η ποσότητα $E\left[X^2\right]$ τότε υποβαθμίζεται το SQNR

> Το μη ομοιόμορφο PCM βελτιώνει αυτή τη σχέση

SQNR Ομοιόμορφου PCM (3)

- Μετατροπή σε dB

$$SQNR\big|_{dB} \approx E\left[\breve{X}^2\right]\Big|_{dB} + 6n + 4.8$$

- Συμπέρασμα:
  - Κάθε επιπλέον bit αυξάνει το SQNR κατά 6dB
  - Συγκρίνετέ το με αυτό που προβλέπει η συνάρτηση ρυθμού – παραμόρφωσης για Gaussian

  (όπου είχαμε δει ότι η παραμόρφωση D μειώνεται κατά 6dB για κάθε αύξηση κατά 1 bit του κώδικα αναπαράστασης)

Εύρος Ζώνης PCM

- Σήμα εύρους ζώνης *W*
- Ελάχιστος ρυθμός δειγματοληψίας *2W δείγματα/sec*
- Συνήθως χρησιμοποιείται υπερδειγματοληψία
  - $f_s > 2W$ *δείγματα/sec*
- Χρησιμοποιούνται *n bits/δείγμα*
- Θέλω να μεταδώσω ρυθμό δεδομένων
  - $f_s n$ *bits/sec*

Αργότερα θα μάθουμε ότι:

- Για τη μετάδοση ενός σήματος με περίοδο συμβόλου 1/R secs,

δηλαδή ρυθμό μετάδοσης R παλμοί(bits ή symbols)/sec,

- απαιτείται εύρος ζώνης μεγαλύτερο ή ίσο από R/2

Εύρος Ζώνης PCM (2)

- Άρα, απαιτείται εύρος ζώνης

$$\boxed{B \geq \frac{nf_s}{2}}$$

- Άρα το απαιτούμενο εύρος ζώνης καναλιού είναι τελικά:

$$\boxed{B \geq nW}$$

- Συμπέρασμα:
  - στην καλύτερη περίπτωση: το σύστημα PCM αυξάνει το εύρος ζώνης του αρχικού σήματος κατά *n*

- Ερώτημα: τι σημαίνει *«στην καλύτερη περίπτωση»*;

Μη Ομοιόμορφο PCM

- Το ομοιόμορφο PCM λειτουργεί ικανοποιητικά για ομοιόμορφη κατανομή του σήματος εισόδου

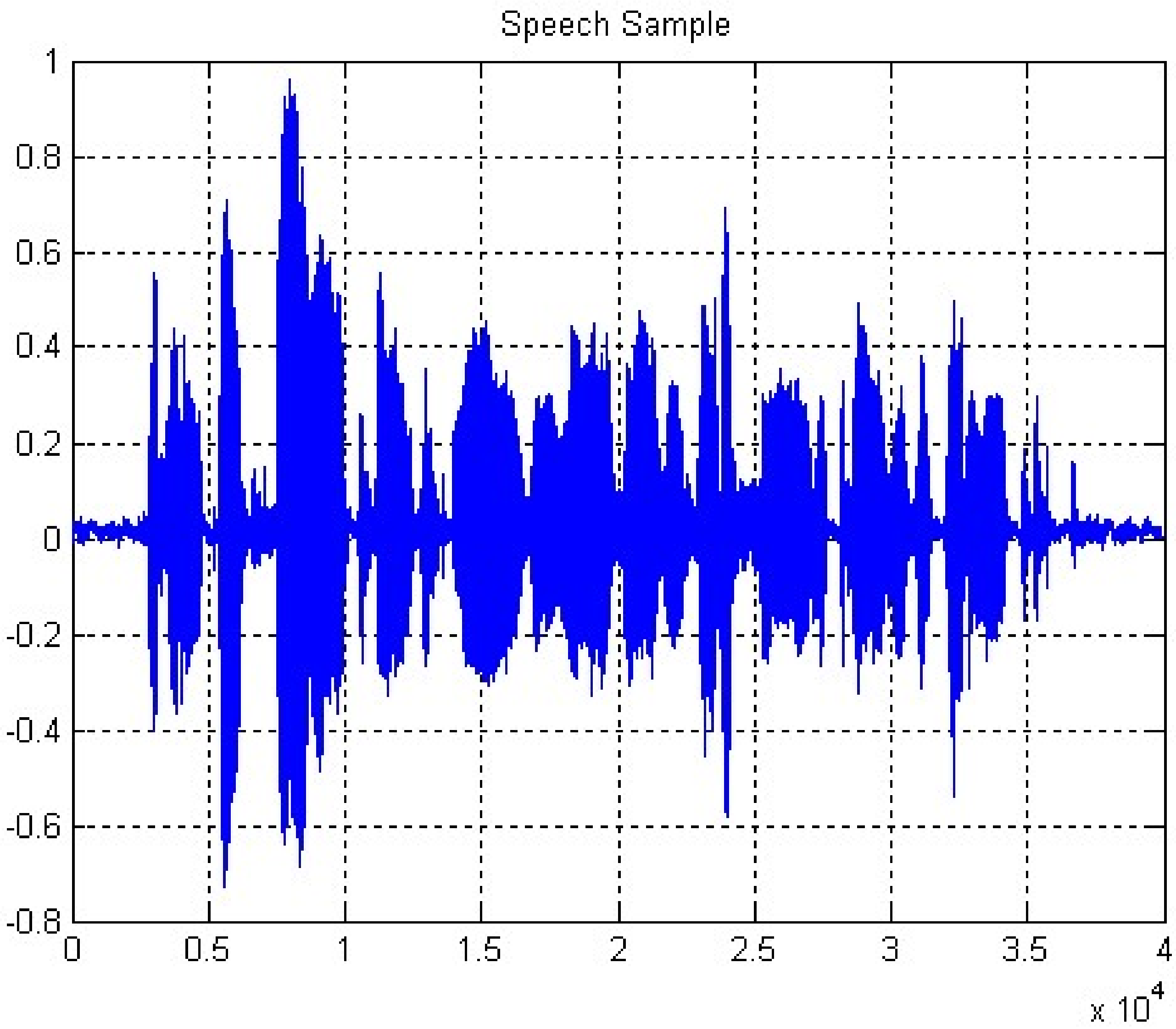
- Δηλαδή όταν το σήμα κατανέμεται ομοιόμορφα σε ολόκληρη τη δυναμική περιοχή των τιμών του

- Πολλά πραγματικά σήματα δεν έχουν ομοιόμορφη κατανομή

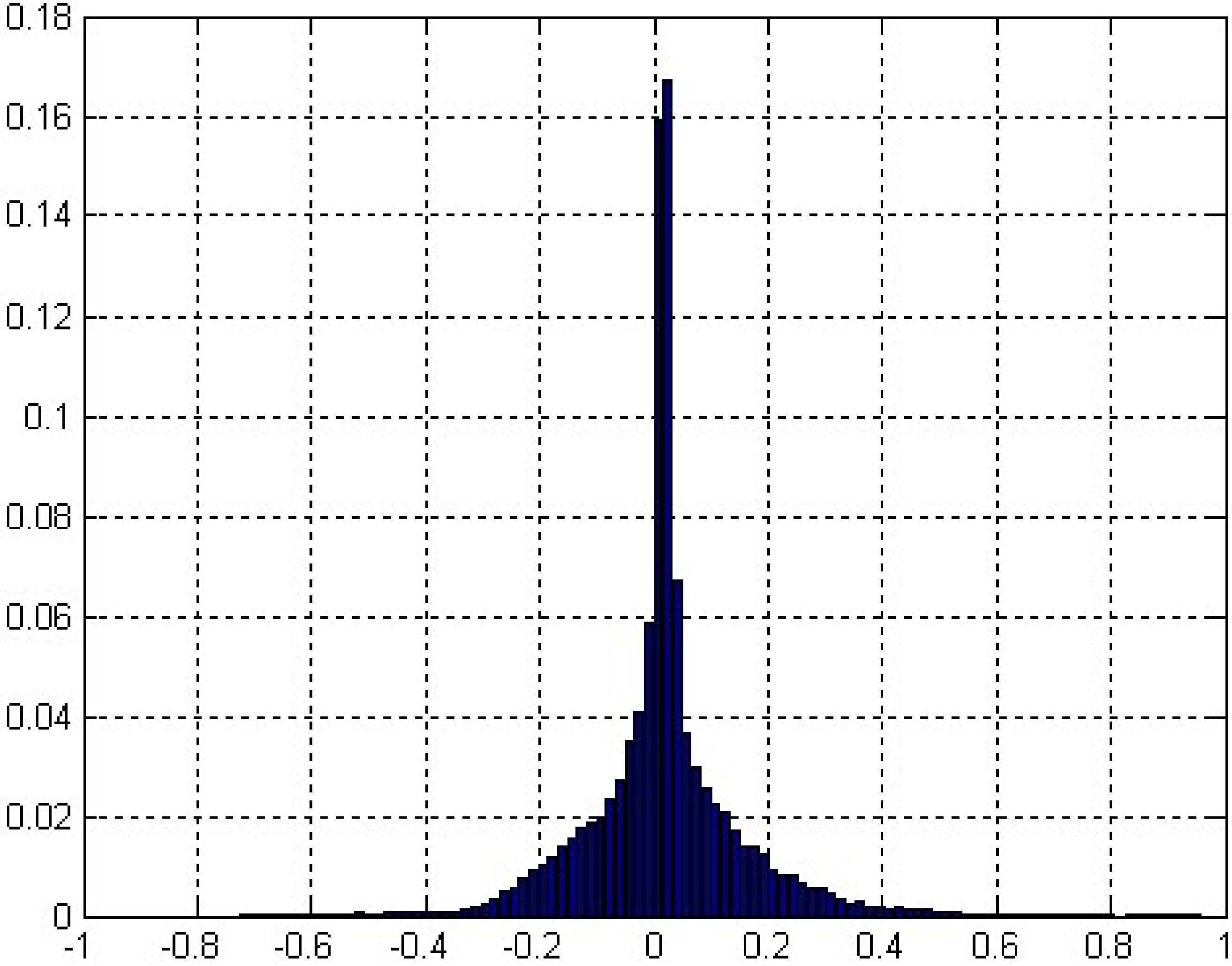
- Παράδειγμα: σήμα ομιλίας

Σήμα Ομιλίας

- Παράδειγμα Σήματος Ομιλίας



Ιστόγραμμα Σήματος Ομιλίας



- Ερωτήσεις:
  - Τι είναι το ιστόγραμμα;
  - Τι παρατηρείτε;

Companding

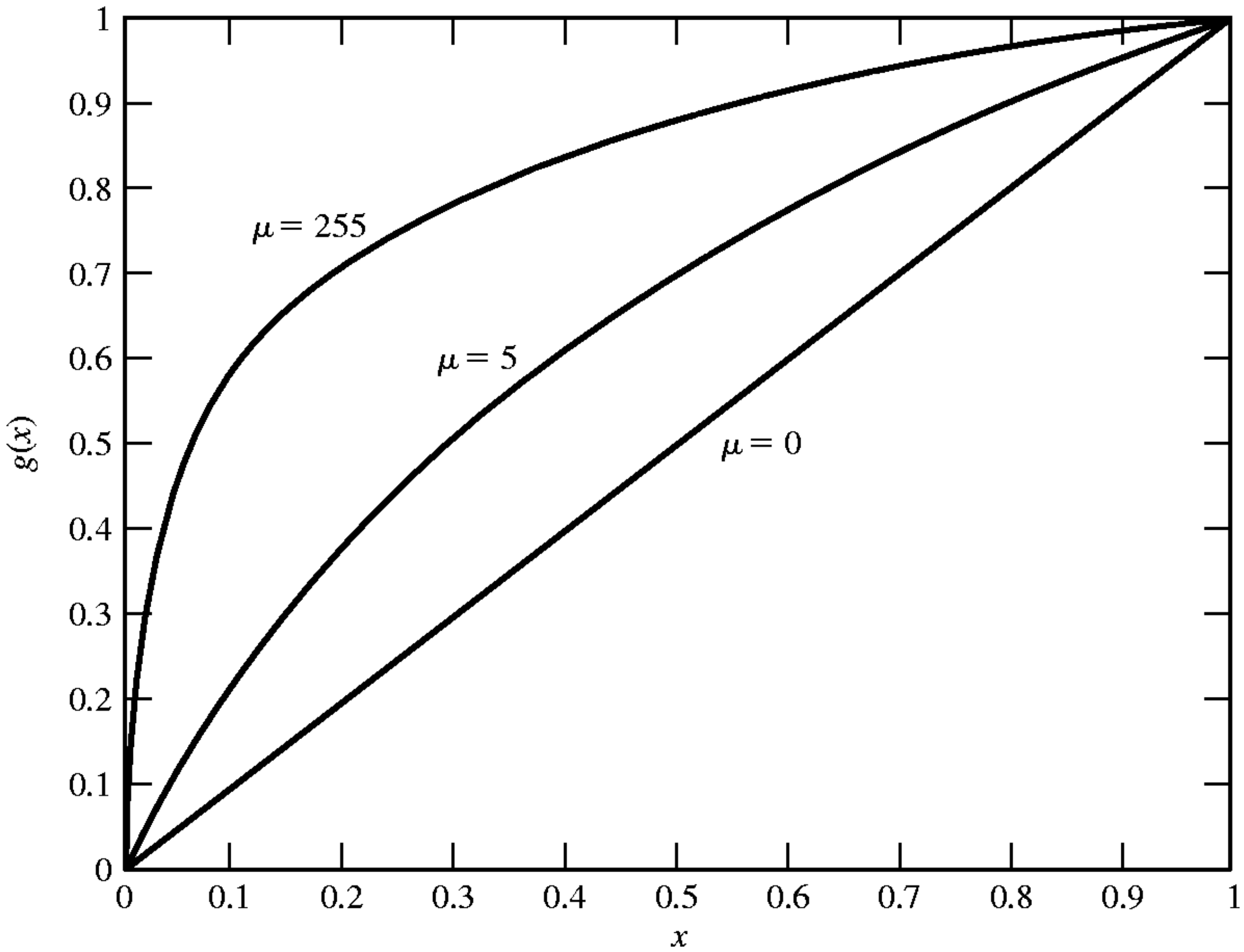
- Συμπιεστής:
  - Τα δείγματα του σήματος διέρχονται από ένα μη γραμμικό στοιχείο
  - τα μεγάλα πλάτη συμπιέζονται
  - μειώνεται η δυναμική περιοχή του σήματος
- Ομοιόμορφο PCM:
  - η έξοδος του συμπιεστή κβαντίζεται ομοιόμορφα όπως και στην απλή περίπτωση
- Δέκτης (Αποκωδικοποιητής):
  - αποσυμπίεση (διάταση) της δυναμικής περιοχής
- Companding: Compressing + Expanding

Συμπιεστής Τύπου-μ

- Συνάρτηση συμπίεσης

$$g(x) = \frac{\log\left(1+\mu|x|\right)}{\log\left(1+\mu\right)}\operatorname{sgn}(x), \quad |x| \le 1$$

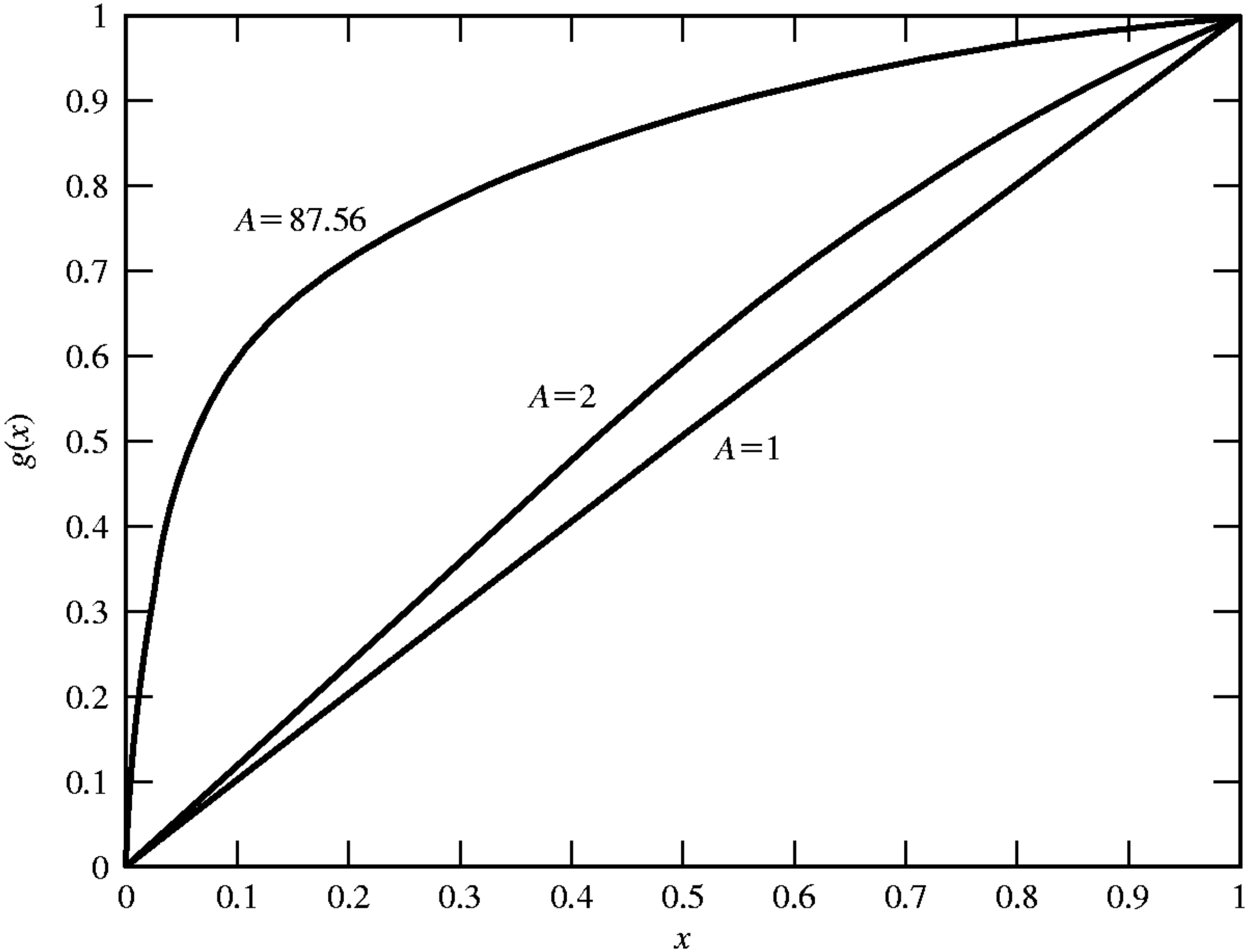
- *μ=255*
- 128 στάθμες *(7 bits/έξοδο)*
- Βελτίωση απόδοσης κατά 24 dB
- Χρησιμοποιείται σε Αμερική και Ιαπωνία



Συμπιεστής Τύπου-Α

- Συνάρτηση συμπίεσης

$$g(x)=\frac{1+\log\left(A|x|\right)}{1+\log\left(A\right)}\operatorname{sgn}(x),\quad |x|\le 1$$



- *A=87.56*
- Ο συμπιεστής τύπου-Α είναι περισσότερο «φιλικός» με τα μικρότερα πλάτη σε σχέση με τον τύπου-μ
- Χρησιμοποιείται στην Ευρώπη

Αναπαράσταση με παλμούς

- Οι κβαντισμένες τιμές αναπαρίστανται με δυαδικά σύμβολα
- Τα δυαδικά σύμβολα εάν πρόκειται να αποσταλούν πρέπει να παρασταθούν με σήματα (παλμούς). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται Κωδικοποίηση Γραμμής. Αργότερα θα δούμε πιο αναλυτικά το θέμα της μορφής του παλμού.

Τυπικοί Κώδικες Γραμμής:

- Κώδικας On-Off (Non Return-to-Zero, NRZ, ή RZ): 0 → 0, 1 → +A
- Πολική κωδικοποίηση: 0→ -A, 1 → +A
- Διπολική: 0 → 0, 1 → εναλλακτικά +A, -A
- Χωρισμού φάσης: 0 → -A (1η ημιπερίοδος) +A (2η ημιπερίοδος), 1 → +A (1η ημιπερίοδος) -A (2η ημιπερίοδος)
- Διαφορική κωδικοποίηση: 0 → μεταβολή του παλμού (A→-A ή –A→A) 1 → μη μεταβολή του παλμού

Αναπαράσταση με παλμούς

Κριτήρια επιλογής κώδικα γραμμής:

- Παρουσία ή όχι DC συνιστώσας (δηλ. σταθερού όρου)
- Επίδραση στην ανάκτηση χρονισμού
- Μορφή φάσματος

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h(t - kT)$$

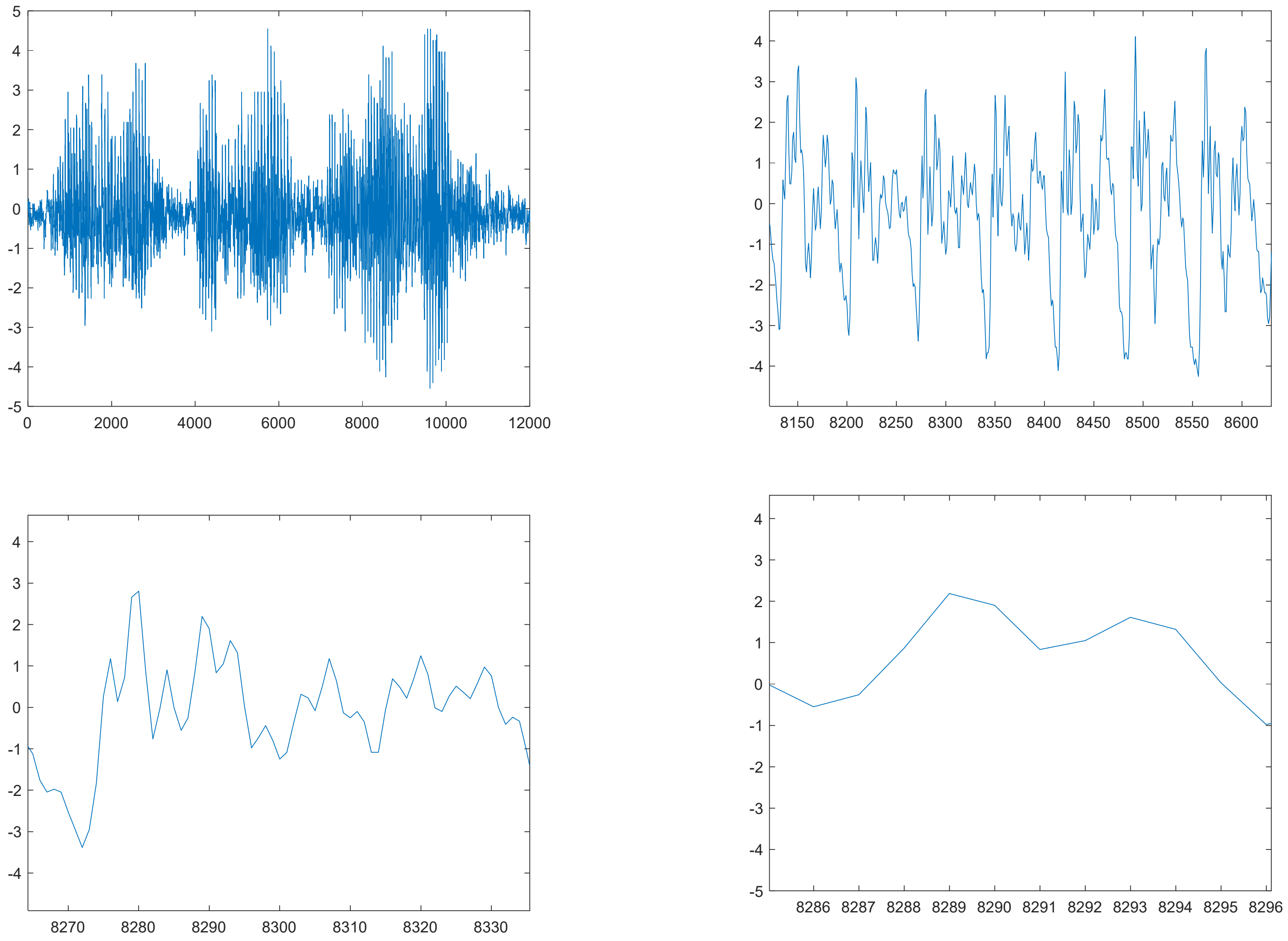
$$S(f) = S_a(f)\,|\,H(f)\,|^2$$

- Αντοχή στο θόρυβο

Διαφορικό PCM (DPCM)

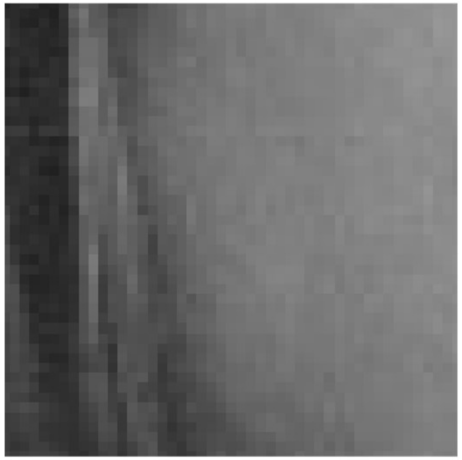
- Στο PCM, κάθε δείγμα κβαντίζεται ξεχωριστά από έναν βαθμωτό κβαντιστή
- Σε ένα διανυσματικό κβαντιστή, κβαντίζονται πολλά δείγματα ταυτόχρονα. Κβαντίζοντας το κάθε μπλοκ χωριστά εκμεταλλευόμαστε τη <u>συσχέτιση</u> των δειγμάτων.
- Εναλλακτικά, μπορούμε να εισάγουμε κάποιου είδους μνήμη στον κβαντιστή και να αξιοποιήσουμε τη <u>συσχέτιση</u>
- Κίνητρο:
  - Όταν έχω τυχαία διαδικασία περιορισμένου εύρους ζώνης και δειγματοληπτείται με ρυθμό Nyquist (ή μεγαλύτερο), τότε τα διαδοχικά δείγματα εμφανίζουν σημαντική συσχέτιση
  - Πώς μπορεί η συσχέτιση να ελαττώσει τον αριθμό bits/έξοδο διατηρώντας την ίδια απόδοση;
- Γενική μέθοδος:
  - Διαφορική Παλμοκωδική Διαμόρφωση (Differential PCM - DPCM)

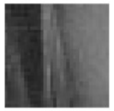
Η συσχέτιση των δειγμάτων



Η συσχέτιση των δειγμάτων

80	87	99	103	105	111	116	113	116	116	124	127	124	125	121
80	90	103	108	110	112	112	117	118	115	120	123	121	125	123
82	92	101	106	112	115	112	118	121	118	122	122	120	125	126
86	92	96	99	109	117	117	116	121	121	125	123	119	124	125
86	96	105	107	110	113	113	117	122	122	126	124	120	125	126
91	96	104	106	108	114	120	122	125	123	126	125	122	129	130
83	100	101	109	110	108	115	114	124	124	121	124	124	122	127
79	91	95	108	114	112	113	116	122	122	121	126	125	123	127
84	92	96	103	110	112	113	118	119	118	121	126	126	124	127
90	90	97	101	108	112	112	118	117	117	121	125	124	124	127
89	78	91	102	113	112	108	116	116	120	123	123	124	126	129
95	78	90	99	107	107	111	114	117	123	125	122	124	129	128
100	81	89	93	97	101	117	112	116	124	124	120	125	130	125
97	72	82	92	97	100	119	110	115	122	121	117	125	129	121
101	90	86	90	101	97	118	109	114	117	118	122	127	128	125
95	88	75	89	94	97	113	109	114	120	123	122	121	124	128
95	88	67	89	87	96	105	112	113	119	125	124	121	124	130
96	86	66	87	87	96	103	112	111	113	119	124	126	127	128
95	80	69	80	90	96	103	108	110	111	113	119	126	128	127
100	81	74	74	87	91	100	105	113	117	115	115	121	128	130
105	85	76	70	82	89	99	105	112	118	119	117	119	126	131
102	84	74	68	79	91	102	106	107	111	118	120	120	123	128
93	91	76	78	80	95	86	99	102	116	119	120	124	120	125
90	85	72	76	77	92	91	96	99	111	113	115	120	117	122
86	81	74	79	77	89	97	99	101	111	113	114	118	118	122
82	80	79	82	77	82	96	98	103	110	114	115	117	117	118
81	79	80	77	72	73	88	91	98	105	111	113	112	113	112
82	81	77	66	68	70	83	87	95	101	110	113	111	113	111





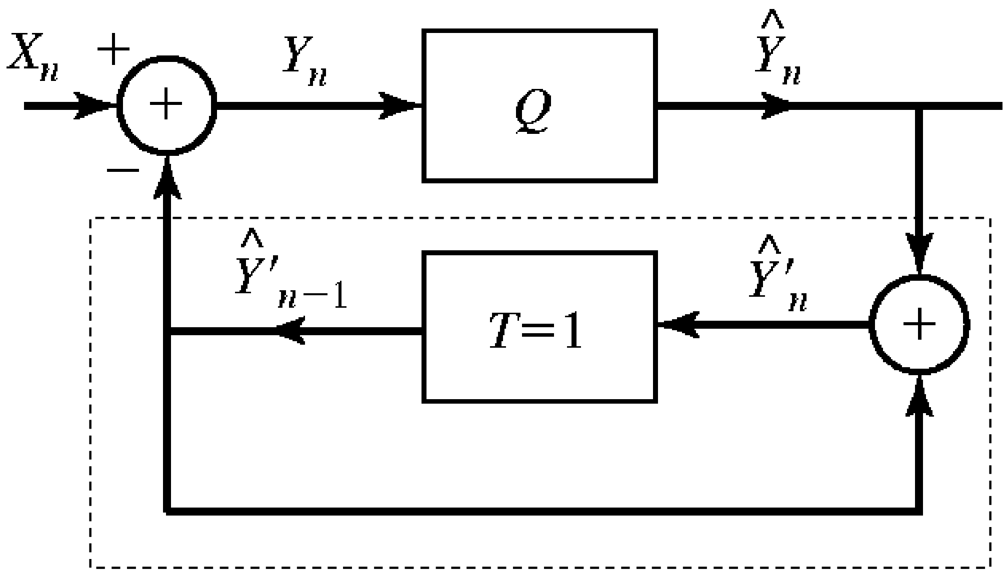
Πομπός Απλού DPCM (1)

- Στην απλούστερη περίπτωση, κβαντίζεται η διαφορά δύο διαδοχικών δειγμάτων
- Αν έχουν μεγάλη συσχέτιση:
  - η διαφορά τους θα έχει μικρή δυναμική περιοχή
  - απαιτεί λιγότερα bits για την κβάντισή της
- Αντί να κβαντίσω τη διαφορά,

$$X_n - X_{n-1}$$

- Κβαντίζω τη διαφορά

$$X_n - \hat{Y}'_{n-1}$$



- διότι το $\hat{Y}'_{n-1}$ είναι κβαντισμένη ποσότητα (διακριτή, που μπορεί να αναπαραχθεί στον δέκτη) και η οποία προσεγγίζει το X_{n-1}

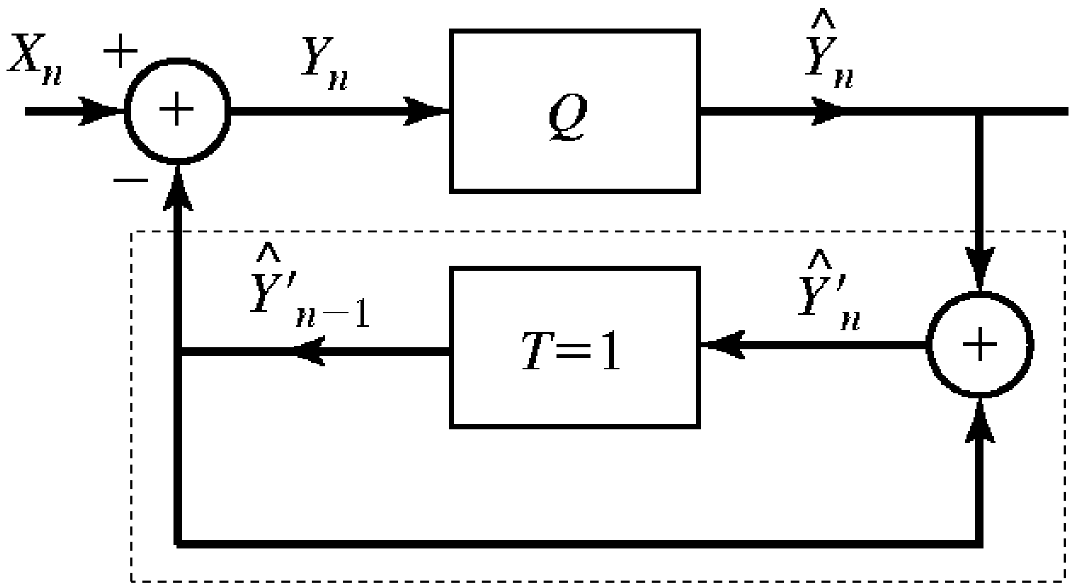
Μέσω του <u>κλάδου ανάδρασης</u> συσσωρεύνται οι διαφορές και έτσι σχηματίζεται μια προσέγγιση του τρέχοντος δείγματος. Η ίδια διαδικασία συσσώρευσης γίνεται και στον δέκτη.

Πομπός Απλού DPCM (2)

- Ισχύουν οι σχέσεις

$$Y_n = X_n - \hat{Y}'_{n-1}$$

$$\hat{Y}'_n = \hat{Y}_n + \hat{Y}'_{n-1}$$

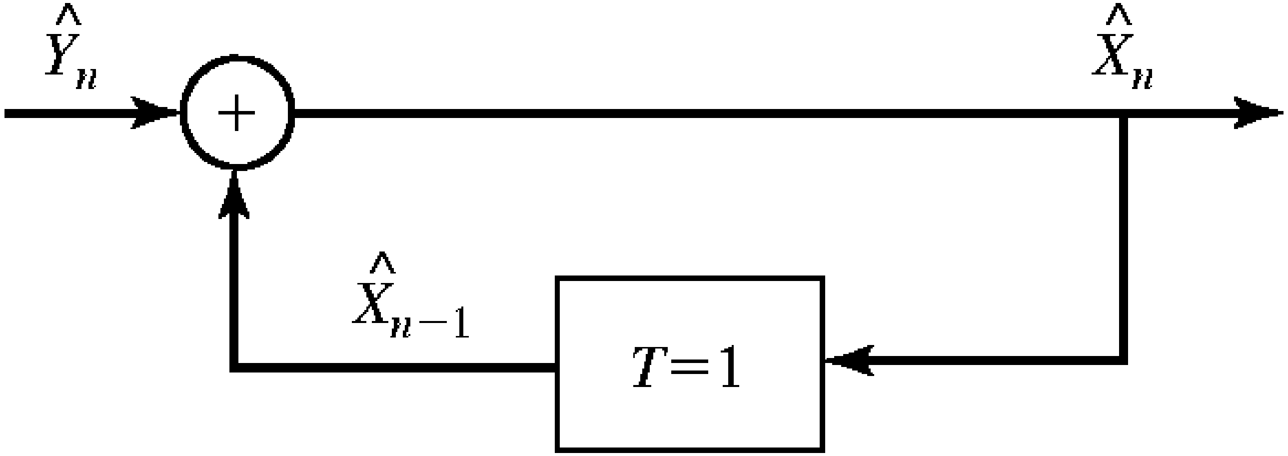


- Σφάλμα κβάντισης (είσοδος – έξοδος κβαντιστή)

$$\hat{Y}_n - Y_n = \hat{Y}_n - \left(X_n - \hat{Y}'_{n-1}\right) = \hat{Y}_n - X_n + \hat{Y}'_{n-1} = \hat{Y}'_n - X_n$$

- *Δηλαδή, το σφάλμα κβάντισης είναι ίσο με τη διαφορά του τρέχοντος δείγματος από την εκτίμησή του (δηλαδή την ανακατασκευασμένη τιμή του)*

Δέκτης Απλού DPCM (1)



- Η έξοδος (ανακατασκευασμένο σήμα) δίνεται ως

$$\boxed{\hat{X}_n = \hat{Y}_n + \hat{X}_{n-1}}$$

Δέκτης Απλού DPCM (2)

- Συγκρίνοντας τις εξισώσεις διαφορών
  - πομπός: $\boxed{\hat{Y}'_n = \hat{Y}'_{n-1} + \hat{Y}_n}$
  - δέκτης: $\boxed{\hat{X}_n = \hat{X}_{n-1} + \hat{Y}_n}$
- Οι δύο ακολουθίες ικανοποιούν την ίδια εξίσωση διαφορών με την ίδια ακολουθία διέγερσης $\left\{\hat{Y}_n\right\}$
- Για ίδιες αρχικές συνθήκες, π.χ. $\boxed{\hat{Y}'_{-1} = \hat{X}_{-1} = 0}$
  - οι δύο έξοδοι θα είναι ίσες

Δέκτης Απλού DPCM (3)

- Χρησιμοποιώντας ότι

$$\boxed{\hat{Y}_n - Y_n = \hat{Y}'_n - X_n}\quad \text{και} \quad \boxed{\hat{X}_n = \hat{Y}'_n}$$

- Προκύπτει:

$$\boxed{\hat{Y}_n - Y_n = \hat{X}_n - X_n}$$

- Συμπέρασμα:
  - *Η διαφορά μεταξύ του σήματος και της ανακατασκευής του στον δέκτη είναι ίση με το σφάλμα μεταξύ της εισόδου-εξόδου του κβαντιστή στον πομπό*

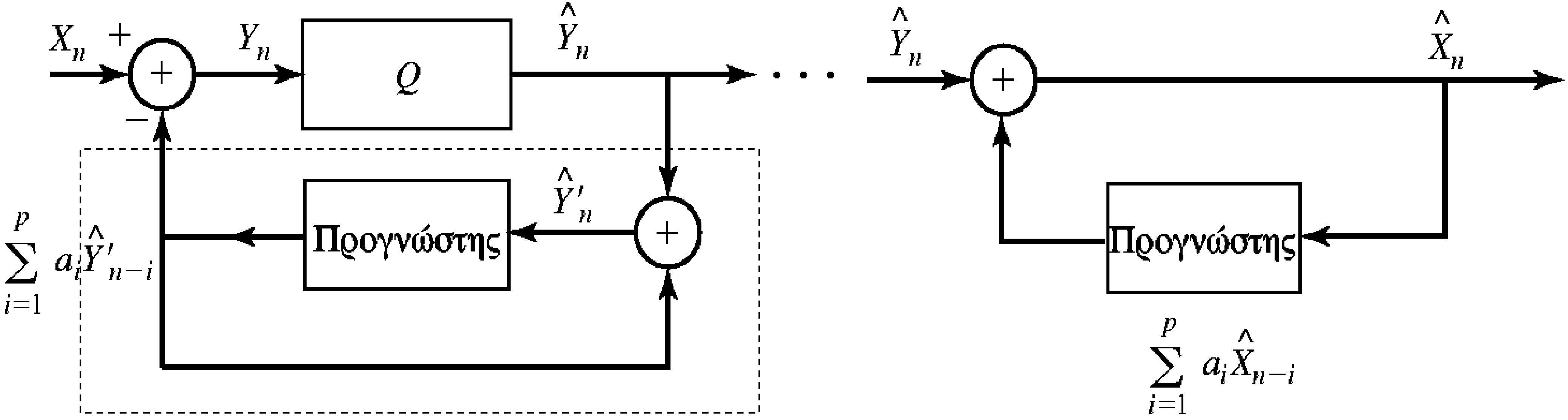
- Αποτέλεσμα:
  - αντί να κβαντίζω το X_n κβαντίζω το Y_n το οποίο έχει πολύ μικρότερη δυναμική περιοχή
  - και μπορεί να κβαντιστεί με λιγότερα bits διατηρώντας την ίδια απόδοση

DPCM με πρόβλεψη

- Γενίκευση της ιδέας του απλού DPCM
- Χρησιμοποιούνται τα *p* προηγούμενα δείγματα για την πρόβλεψη του τρέχοντος δείγματος
- Κβαντίζεται η διαφορά μεταξύ του δείγματος και της πρόβλεψής του
  - κατά τρόπο αντίστοιχο του απλού DPCM *(p=1)*
- Χρησιμοποιείται γραμμικός προβλεπτής τάξης *p*

$$\boxed{X_n \approx \sum_{i=1}^{p} a_i X_{n-i}}$$

Διάγραμμα Πομπού – Δέκτη DPCM



- Η καθυστέρηση *T=1* του απλού DPCM έχει αντικατασταθεί από το φίλτρο του προβλεπτή (ή προγνώστη)
- Όπως βλέπουμε στο σχήμα ο προβλεπτής (προγνώστης) έχει ως είσοδο όχι την ίδια την ακολουθία $\{X_n\}$ αλλά τη διακριτή προσέγγισή της που όμως έχει ίδια 'προβλεψιμότητα'
- Ισχύει και εδώ $\boxed{\hat{Y}_n - Y_n = \hat{X}_n - X_n}$

Σύστημα DPCM

- Επειδή χρησιμοποιούνται περισσότερα δείγματα του σήματος για να προβλέψουμε την τρέχουσα τιμή
  - η πρόβλεψη είναι καλύτερη,
  - άρα το σφάλμα πρόβλεψης είναι μικρότερο
  - και απαιτούνται λιγότερα bits για την κβάντισή του
- Συμπέρασμα: το σύστημα DPCM με γραμμική πρόβλεψη πετυχαίνει ακόμη χαμηλότερους ρυθμούς κωδικοποίησης
- Χρήση: Το σύστημα DPCM μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συμπίεση σημάτων ομιλίας, εικόνας, βίντεο κ.α.
- Προσαρμοστικό DPCM - Adaptive DPCM (ADPCM)

  Όταν το σήμα έχει μεταβαλλόμενα στατιστικά χαρακτηριστικά, τότε χρησιμοποιούμε ADPCM που έχει:

  - Προσαρμοστικό γραμμικό προβλεπτή και

  - προσαρμοστικό βήμα κβάντισης

Σχεδιασμός φίλτρου πρόβλεψης (1)

- Όπως ήδη ειπώθηκε, στο γενικό DPCM:

- Χρησιμοποιείται γραμμικός προβλεπτής τάξης *p*

$$X_n \approx \sum_{i=1}^{p} a_i X_{n-i}$$

- Οι συντελεστές του φίλτρου πρόβλεψης a_i επιλέγονται ώστε να ελαχιστοποιείται η μέση παραμόρφωση (μέσο σφάλμα πρόβλεψης):

$$D = E\left[\left(X_n - \sum_{i=1}^{p} a_i X_{n-i}\right)^2\right]$$

Σχεδιασμός φίλτρου πρόβλεψης (2)

- Για στάσιμη διαδικασία X_n το μέσο σφάλμα πρόβλεψης είναι

$$D = r_x(0) - 2\mathbf{a}^T\mathbf{r} + \mathbf{a}^T\mathbf{R}\mathbf{a}$$

  – όπου **R** , **r** και r_X περιέχουν ποσότητες αυτοσυσχέτισης της X_n και **a** είναι το διάνυσμα των αγνώστων

- Για να ελαχιστοποιηθεί το D, παραγωγίζουμε ως προς **a** και θέτουμε την παράγωγο ίση με το μηδέν

- Προκύπτει το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{r}$$

Σχεδιασμός φίλτρου πρόβλεψης (3)

- Αναλυτικότερα, το σύστημα εξισώσεων μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{bmatrix} r_X(0) & r_X(1) & \cdots & r_X(p-1) \\ r_X(1) & r_X(0) & \cdots & r_X(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_X(p-1) & r_X(p-2) & \cdots & r_X(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_X(1) \\ r_X(2) \\ \vdots \\ r_X(p) \end{bmatrix}$$

- Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως Εξισώσεις Yule-Walker

Παρατηρήσεις:

- Επειδή η διαδικασία $\{X_n\}$ θεωρείται ασθενώς στάσιμη ο πίνακας προκύπτει να είναι Toeplitz και συμμετρικός ($r_x(k)=r_x(-k)$)
- Επίλυση με αλγόριθμο Levinson (πολυπλοκότητα $O(p^2)$)
- Οι ποσότητες αυτοσυσχέτισης υπολογίζονται μέσω χρονικών μέσων όρων.

Διαμόρφωση Δέλτα

- Delta Modulation (DM)

- Είναι η απλούστερη μορφή DPCM
  - Χρησιμοποιεί μόνο το προηγούμενο δείγμα, όπως στο απλό DPCM *(p=1)*
  - Αλλά επίσης χρησιμοποιεί κβαντιστή ενός μόνο bit (για να κβαντίσει το σφάλμα πρόβλεψης)

- Με ένα bit κβάντισης προκύπτουν δύο στάθμες, $\pm\Delta$,
  - για αυτό το λόγο και ονομάζεται διαμόρφωση Δέλτα

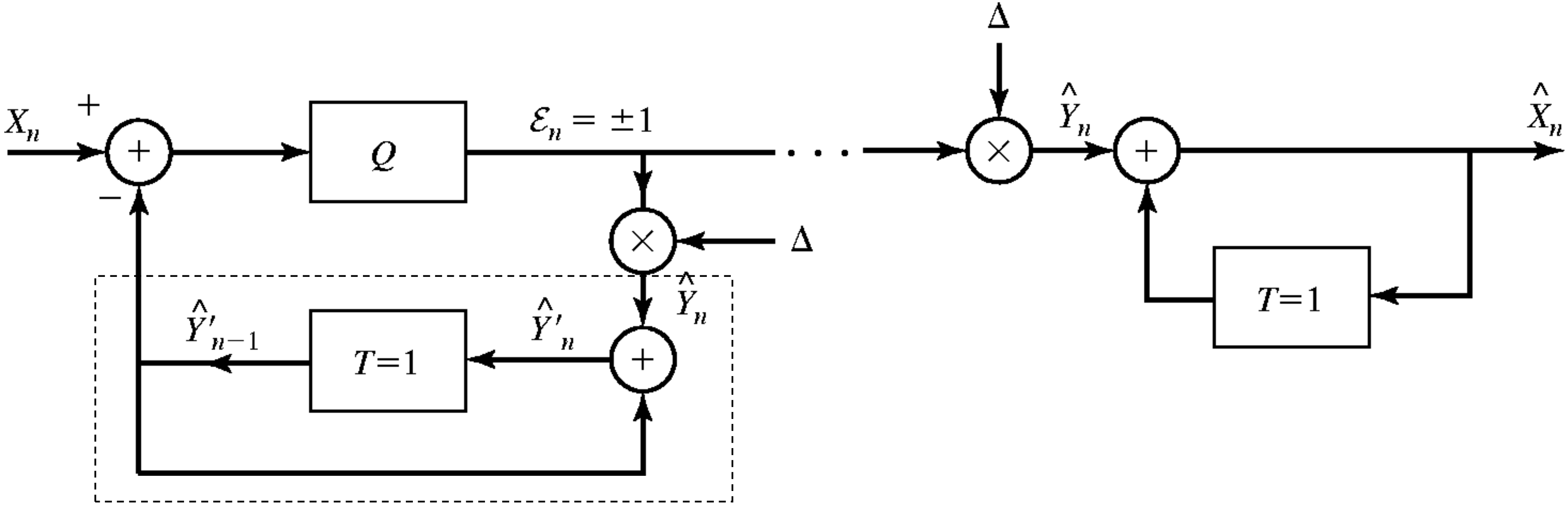
- Εφαρμόζεται η ίδια ανάλυση όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις

Διαμόρφωση Δέλτα (2)

- Επειδή χρησιμοποιείται μόνο ένα bit για την κβάντιση και ταυτόχρονα θέλουμε το σφάλμα κβάντισης να είναι μικρό, θα πρέπει τα διαδοχικά δείγματα του σήματος εισόδου να εμφανίζουν μεγάλη συσχέτιση
  - δηλαδή να είναι σχεδόν ίδια μεταξύ τους
  - ώστε η δυναμική περιοχή της διαφοράς τους να είναι μικρή
- Αυτό επιτυγχάνεται αν η δειγματοληψία είναι αρκετά πυκνή
  - ίσως αρκετά μεγαλύτερη από το όριο Nyquist

- Ερώτηση: Αυξάνοντας το ρυθμό δειγματοληψίας, προκύπτουν πολλά δείγματα/sec. Αυτό μήπως μειώνει το ποσοστό συμπίεσης του κωδικοποιητή;

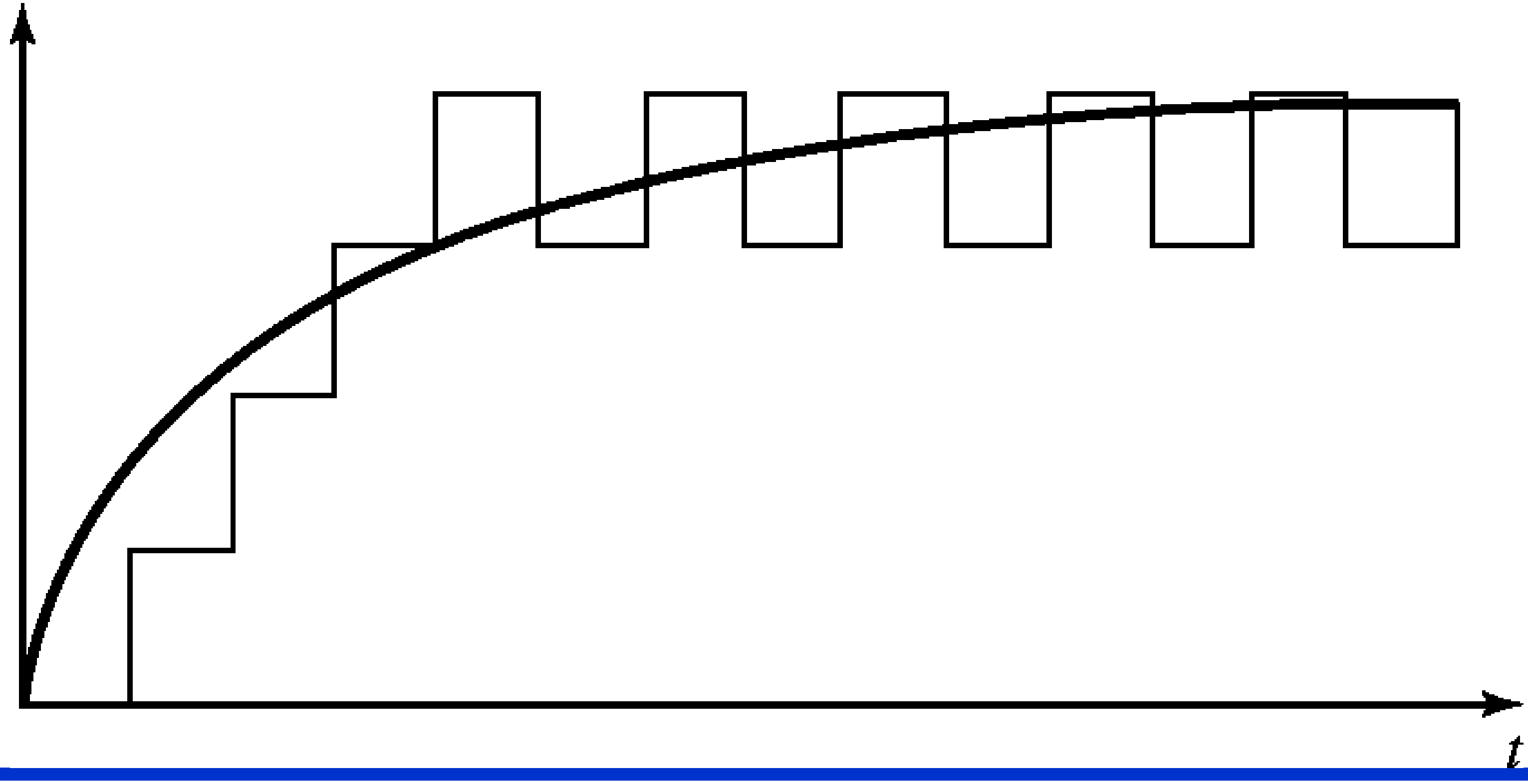
Διάγραμμα DM



- Στο δέκτη ισχύει $\boxed{\hat{X}_n - \hat{X}_{n-1} = \hat{Y}_n}$
- Για $\boxed{\hat{X}_1 = 0}$, προκύπτει $\boxed{\hat{X}_n = \sum_{i=0}^{n} \hat{Y}_i = \sum_{i=0}^{n} \Delta sgn\{\varepsilon_i\}}$
- Συμπέρασμα: το ανακατασκευασμένο σήμα είναι το άθροισμα όλων των προηγούμενων τιμών (προσήμων επί Δ) που φθάνουν στο δέκτη

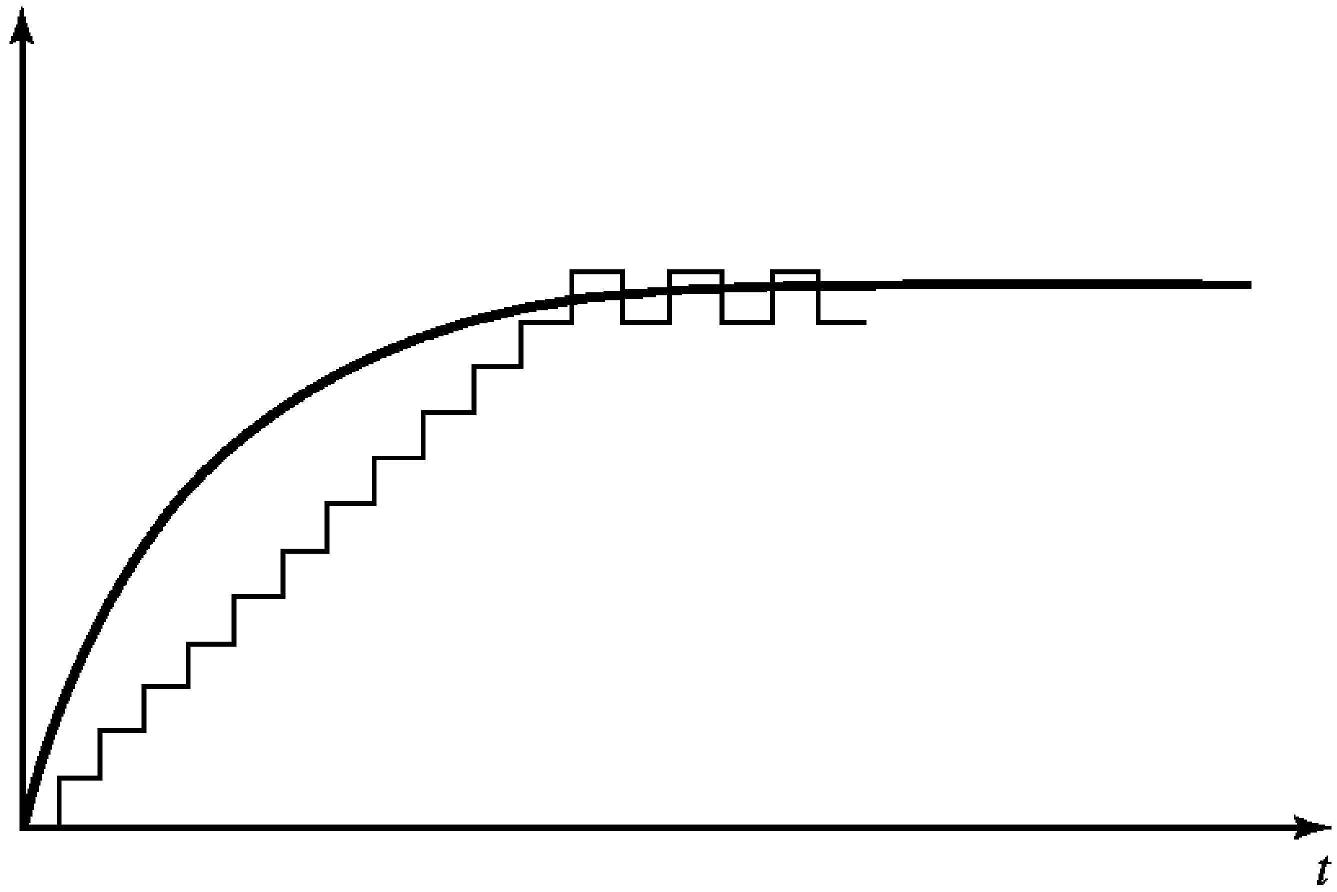
Κοκκώδης Θόρυβος (Granular Noise)

- Η επιλογή του εύρους βαθμίδας *Δ* είναι πολύ σημαντική
- Αν επιλεχθεί μεγάλο *Δ*, ο DM
  - μπορεί μεν να παρακολουθήσει ταχείες μεταβολές σήματος
  - αλλά εισάγεται σημαντικός θόρυβος κβάντισης όταν το σήμα μεταβάλλεται αργά



Υπερφόρτωση Κλίσης (Slope-Overload Distortion)

- Αν επιλεχθεί μικρό Δ, ο DM
  - δεν εμφανίζει πρόβλημα σε αργές μεταβολές σήματος
  - καθυστερεί όμως να ακολουθήσει απότομες μεταβολές του σήματος (όταν $(\Delta/T_s)<|dx(t)/dt|$)



Λύσεις για την Επιλογή του Δ

- Για να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα με την επιλογή του *Δ*
  - μπορεί να επιλεγεί μια *«ενδιάμεση τιμή»*

- Μέθοδος 1: Επιλέγεται η τιμή Δ που ελαχιστοποιεί τη μέση τετραγωνική παραμόρφωση (πολύπλοκη αλλά εφαρμόσιμη)

- Μέθοδος 2: Επιλέγεται η τιμή του Δ να μεταβάλλεται ανάλογα με τις τρέχουσες τιμές του σήματος εισόδου, δηλαδή
  - όταν το σήμα μεταβάλλεται γρήγορα, επίλεξε μεγάλο *Δ*
  - όταν το σήμα είναι σχεδόν σταθερό, επίλεξε μικρό *Δ*

- Αυτή η λύση, οδήγησε στην Προσαρμοστική Διαμόρφωση Δέλτα (Adaptive Delta Modulation, ADM)

ADM

- Χρειάζεται ένας απλός μηχανισμός παρακολούθησης του ρυθμού μεταβολής του σήματος
- Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένας διαφοριστής,
  - αλλά αναζητείται μια απλή λύση ώστε να διατηρηθεί η απλότητα της DM

- Παρατήρηση:

1. Για μικρή κλίση σήματος εισόδου,
   - κοκκώδης θόρυβος
   - οι έξοδοι του ADM είναι διαδοχικές εναλλαγές $+\Delta$ και $-\Delta$
   - το Δ πρέπει να ελαττωθεί
2. Για μεγάλη κλίση σήματος εισόδου,
   - υπερφόρτωση κλίσης
   - οι έξοδοι του ADM έχουν συνεχώς το ίδιο πρόσημο
   - το Δ πρέπει να αυξηθεί

ADM (2)

- Απλός Κανόνας Μεταβολής: $\Delta_n = \Delta_{n-1} K^{\varepsilon_n \times \varepsilon_{n-1}}$

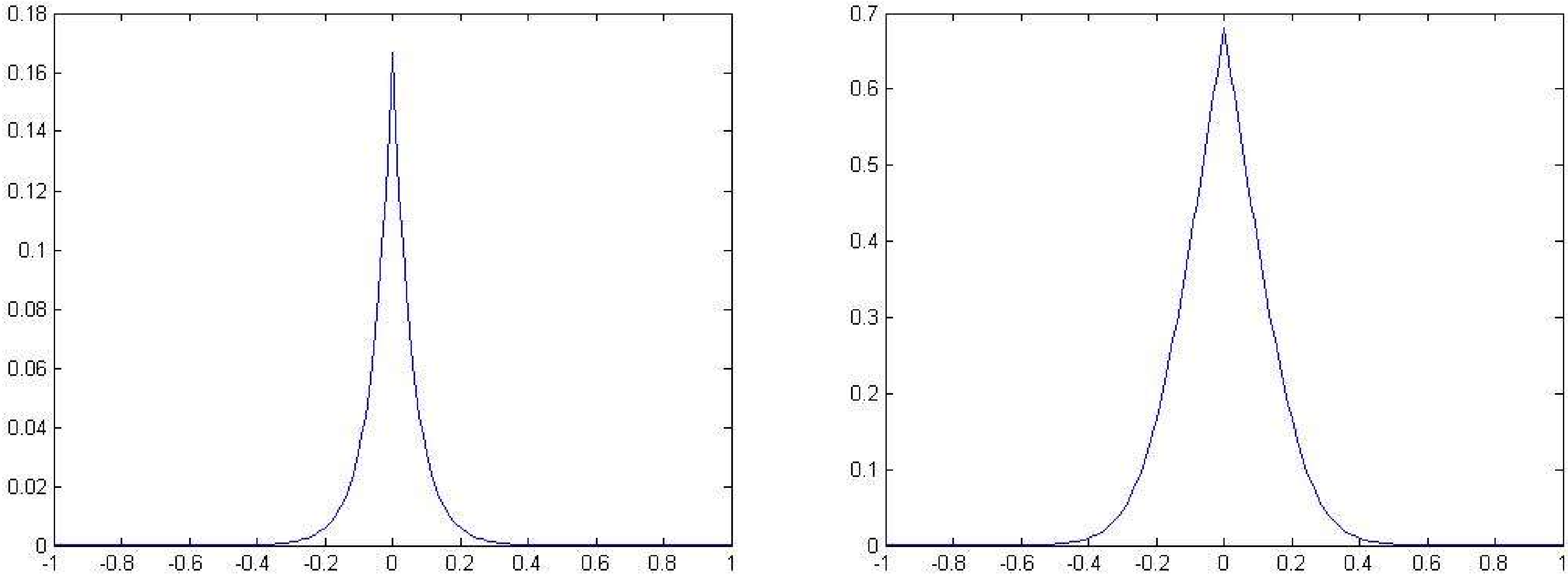
- όπου
  - ε_n είναι το πρόσημο της εξόδου του κβαντιστή
  - $K>1$ σταθερά

- Ερώτηση: Για την αποκωδικοποίηση ενός σήματος DM, ο δέκτης απαιτείται να γνωρίζει το *Δ.*
  - Στην περίπτωση του Adaptive DM, μπορεί ο δέκτης να μάθει το τρέχον *Δ*;

- Χρήση: Για την περιοχή ρυθμού 20-60 Kbits/sec με $K=1.5$, το ADM είναι 5-10 dB καλύτερο του DM για σήματα ομιλίας

Συμπιεστής Τύπου-μ (ΟΧΙ)

Εφαρμογή συμπίεσης τύπου *μ* στα δεδομένα φωνής του προηγούμενου παραδείγματος



- Προσέγγιση του ιστογράμματος με Laplacian pdf με μέση τιμή μηδέν και διασπορά ίση με 0.06
- *μ=255*

Βέλτιστος Compander (ΟΧΙ)

- Βέλτιστος: Ίδια προσέγγιση με τον ομοιόμορφο κβαντιστή
- Θέτουμε τα άκρα

$$a_0 = -x_{\max}, \quad a_N = x_{\max}$$

- Η παραμόρφωση ορίζεται ως

$$D = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(x - \hat{x}_i\right)^2 f_X\left(x\right) dx$$

- Προσέγγιση:
  - Αν οι περιοχές κβάντισης είναι πολλές και η pdf είναι αρκετά ομαλή
  - Τότε η pdf της εισόδου μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφη και σχεδόν σταθερή σε κάθε περιοχή κβάντισης

$$f_X\left(x\right) \approx f_X\left(a_{i-1}\right), \quad a_{i-1} < x \le a_i$$

Βέλτιστος Compander (2) (ΟΧΙ)

- Στάθμες Κβάντισης
  - Μηδενίζω την παράγωγο της παραμόρφωσης ως προς τις στάθμες
  - Προκύπτει ότι οι στάθμες πρέπει να είναι ο μέσος όρος της περιοχής

$$\hat{x}_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$$

- Παραμόρφωση: αντικαθιστώ τα παραπάνω και προκύπτει

$$D \approx \sum_{i=1}^{N} f_X\left(a_{i-1}\right) \frac{\Delta_i^3}{12}$$

$$\Delta_i = a_i - a_{i-1}$$

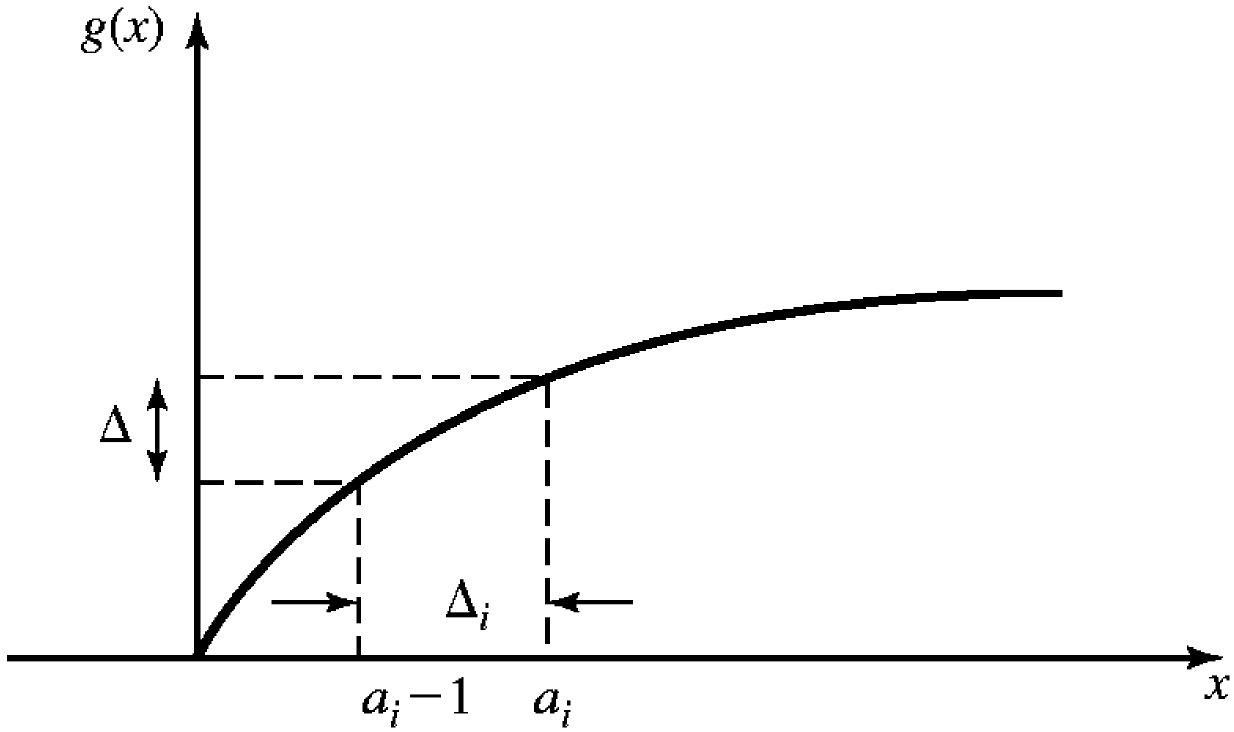
Βέλτιστος Compander (3) (ΟΧΙ)

- Συμπιεστής:
  - είσοδος: μια ακολουθία κβαντισμένων δειγμάτων που προέρχεται από μη ομοιόμορφο κβαντιστή (Δ_i)
  - έξοδος: ακολουθία δειγμάτων από ομοιόμορφο κβαντιστή με σταθερό Δ

- Υποθέσεις:

$$g'(a_{i-1}) \approx \frac{\Delta}{\Delta_i}$$

$$g(-x_{\max}) = -y_{\max}$$
$$g(x_{\max}) = y_{\max}$$



Βέλτιστος Compander (4) (ΟΧΙ)

- Η παραμόρφωση γράφεται

$$D \approx \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{N} f_X\left(a_{i-1}\right) \left(\frac{\Delta}{g'\left(a_{i-1}\right)} \right)^2 \Delta_i$$

- Δεδομένου ότι

$$\Delta = \frac{y_{\max}}{2^{n-1}}$$

- και υποθέτοντας ότι το N είναι μεγάλο

$$D \approx \frac{y_{\max}^2}{3 \cdot 4^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X(x)}{\left[g'(x)\right]^2} dx$$

- Ισχύει για έναν συμπιεστή με συνάρτηση συμπίεσης *g(x)*

Βέλτιστος Compander (5) (ΟΧΙ)

- Η βέλτιστη συνάρτηση συμπίεσης είναι

$$g(x) = y_{\max}\left[\frac{2\int_{-\infty}^{x}\left[f_X(v)\right]^{\frac{1}{3}}dv}{\int_{-\infty}^{\infty}\left[f_X(v)\right]^{\frac{1}{3}}dv} - 1\right]$$

- Η παραμόρφωση που προκύπτει τότε είναι

$$D = \frac{1}{12\cdot 4^{n}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left[f_X(x)\right]^{\frac{1}{3}}dx\right]^{3}$$

Εναλλακτικό Διάγραμμα DM (ΟΧΙ)

- Αν εκμεταλλευτούμε το προηγούμενο συμπέρασμα,
  - μπορούμε να εισάγουμε ένα συσσωρευτή (ολοκληρωτή, accumulator)
  - και το σύστημα DM απλοποιείται περαιτέρω