Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

Κωδικοποίηση Αναλογικής Πηγής:

Κβάντιση

Εισαγωγή

- Αναλογική πηγή:
  - μετά από δειγματοληψία γίνεται διακριτού χρόνου
  - άπειρος αριθμός bits/έξοδο για τέλεια αναπαράσταση
- Θεωρία Ρυθμού-Παραμόρφωσης (R-D): σχέση ανάμεσα
  - σε ρυθμό bits/έξοδο του κωδικοποιητή και στην
  - παραμόρφωση που εισάγεται
- Τα θεμελιώδη όρια της θεωρίας R-D:
  - ισχύουν ασυμπτωτικά για μέγεθος μπλοκ $n \to \infty$
  - οδηγούν σε πολύπλοκους (απο)κωδικοποιητές
- Θα δούμε πρακτικά σχήματα κωδικοποίησης αναλογικής πηγής
  - με χαμηλό ρυθμό bits/έξοδο
  - και ανεκτή παραμόρφωση

Δειγματοληψία

- Έστω αναλογική πηγή *x(t)*. Η δειγματοληψία της με ρυθμό $f_s=1/T_s$ ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό της *x(t)* με τη λεγόμενη συνάρτηση Dirac comp περιόδου T_s:

$$x_\delta(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

- Με βάση της ιδιότητες του MF και κλασικά αποτελέσματα της Θεωρίας Συστημάτων έχουμε:

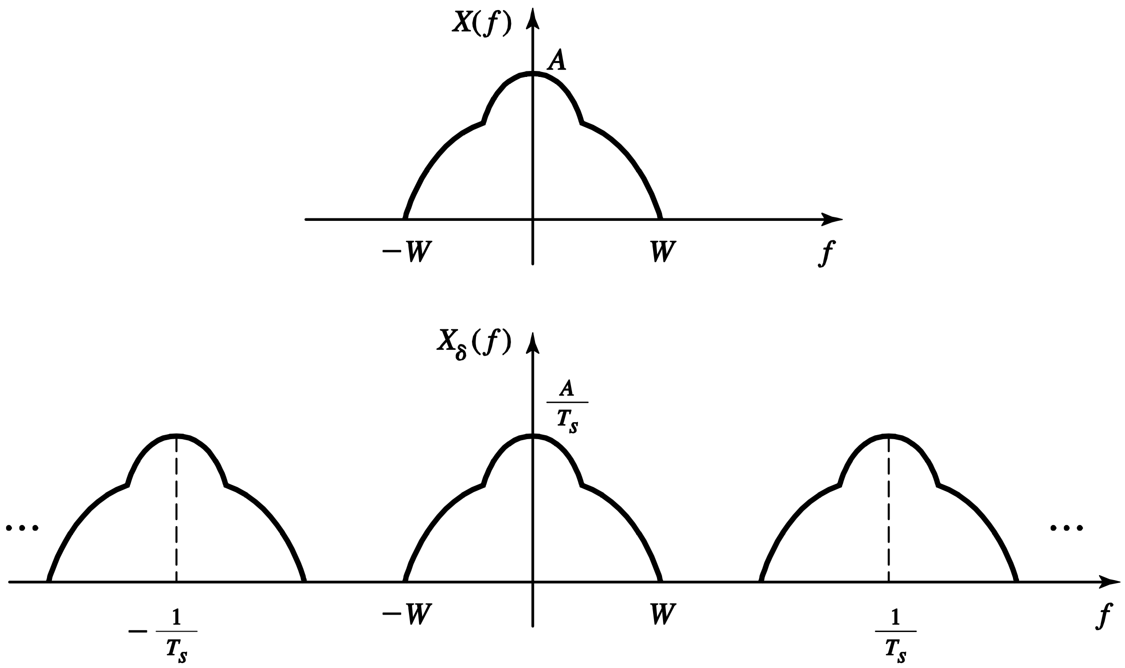
$$F\left[\delta_{T_s}(t)\right] = f_s\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(f-mf_s)$$

$$X_\delta(f) = X(f)*\left[f_s\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(f-mf_s)\right]$$

Δειγματοληψία

- Οπότε το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος μπορεί να γραφτεί ως η συνέλιξη του αρχικού φάσματος με μια συνάρτηση Dirac comp περιόδου f_s :

$$\boxed{X_\delta(f) = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s)}$$



- Αν f_s>=2W (όπου W το εύρος ζώνης του *x(t)*) τότε το *x(t)* μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τα δείγματα του (Θεώρημα Nyquist)

Δειγματοληψία

- Δειγματοληψία στοχαστικού σήματος:

Εάν το στοχαστικό σήμα είναι ασθενώς στάσιμο με ζωνοπεριορισμένη πυκνότητα φάσματος ισχύος, τότε, αν δειγματοληπτηθεί με κατάλληλη συχνότητα (δηλ. $f_s >= 2W$), μπορεί να ανακατασκευαστεί με μηδενικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Δηλαδή, το ανακατασκευασμένο σήμα είναι ίσο με το αρχικό "in the MSE sense".

$$\boxed{E\left[\left(x(t) - x'(t)\right)^2\right] = 0}$$

- ➢ Γενική ερώτηση: Τι γίνεται αν $f_s < 2W$;
- ➢ Σοβαρά προβλήματα λόγω αναδίπλωσης. Εκτός αν …

- Συμπιεσμένη Δειγματοληψία (Compressed Sampling) :

Μια (σχεδόν επαναστατική) εξέλιξη των τελευταίων χρόνων είναι ότι:

Εάν το αναλογικό σήμα είναι αραιό σε κάποιο πεδίο (και εάν ισχύουν και κάποιες άλλες υποθέσεις) τότε μπορεί να δειγματοληπτηθεί με ρυθμό μικρότερο (ή και αρκετά μικρότερο) του Nyquist. Το σήμα μπορεί να ανακατασκευαστεί από τα δείγματα με οσοδήποτε μικρή (ελεγχόμενη) απόκλιση σε σχέση με το αρχικό.

Κβάντιση

- Διακριτοποίηση του πεδίου τιμών
- Διάκριση Κβαντιστών
  - Βαθμωτός Κβαντιστής: κάθε δείγμα της πηγής κβαντίζεται (κωδικοποιείται) ξεχωριστά
  - Διανυσματικός Κβαντιστής: τα δείγματα κβαντίζονται κατά μπλοκ

- Θα δούμε περιπτώσεις και από τις δύο κατηγορίες

- Θα δούμε πώς συγκρίνονται οι βαθμωτοί με τους διανυσματικούς κβαντιστές ως προς τα εξής:
  - πολυπλοκότητα
  - ρυθμός για δεδομένη παραμόρφωση
  - καθυστέρηση κωδικοποίησης

Βαθμωτή Κβάντιση

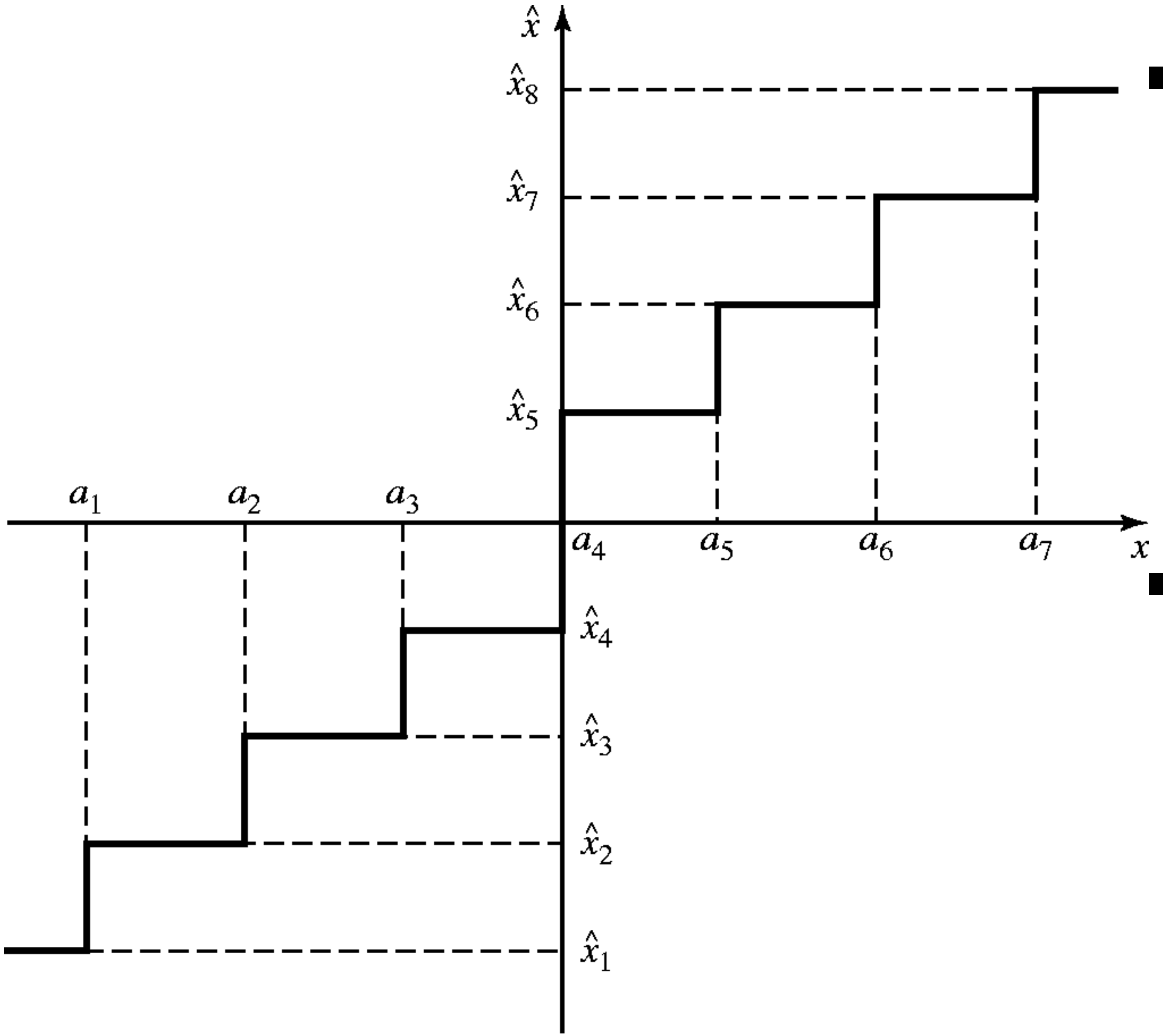
- Κάθε δείγμα (έξοδος της πηγής) κβαντίζεται χωριστά
- Γενικά *x(n)* πραγματικός αριθμός → Απαιτείται άπειρος αριθμός bits για τέλεια αναπαράσταση

Προσεγγιστική αναπαράσταση:

- Χωρίζεται το σύνολο των πραγματικών σε *N* μη επικαλυπτόμενες περιοχές, R_k, $k=1,\ldots,N$
- Για κάθε περιοχή επιλέγεται μια αντιπροσωπευτική τιμή $\boxed{\hat{x}_k}$
- Αν η έξοδος *x* ανήκει στην R_k, κβαντίζεται στο $\boxed{\hat{x}_k}$
- Στέλνουμε τη δυαδική αναπαράσταση της περιοχής *k*,
- Απαιτούνται $R=\log_2 N$ bits/έξοδο

- Παρατήρηση:
  - τα bits αναπαράστασης μειώθηκαν από άπειρα σε $\log_2 N$
  - αλλά εισήχθηκε παραμόρφωση

Παράδειγμα Βαθμωτής Κβάντισης



- Περιοχές:
  - $R_1=(-\infty,a_1]$
  - $R_2=(a_1, a_2]$
  - ...
  - $R_8=(a_7,\infty)$
- Τιμές κβάντισης:

$$\boxed{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_8}$$

Συνάρτηση Κβάντισης

- Συνάρτηση Κβάντισης

$$Q(x) = \hat{x}_i \,, \qquad \forall x \in R_i$$

- Μη γραμμική
- Μη αναστρέψιμη
  - όλα τα σημεία της R_k απεικονίζονται στο ίδιο σημείο
  - ένα ποσό πληροφορίας χάνεται ανεπιστρεπτί

- Μετρική στιγμιαίας παραμόρφωσης: τετραγωνικό σφάλμα

$$d(x,\hat{x}) = (x - Q(x))^2 = \tilde{x}^2$$

- Μέση Παραμόρφωση:

$$D = E\left[d\left(X,\hat{X}\right)\right] = E\left[\left(X - Q(X)\right)^2\right] = E\left[\tilde{x}^2\right]$$

Θόρυβος Κβάντισης

- Το τελικό (κβαντισμένο) σήμα μπορεί να εκφραστεί ως

$$\boxed{\hat{x} = Q(x) = x - \tilde{x}}$$

- Η δεύτερη ποσότητα (\tilde{x}) καλείται θόρυβος κβάντισης
- Στόχος: ο θόρυβος κβάντισης να έχει μικρή ισχύ

$$\boxed{P_{\tilde{X}} = E\left[\tilde{X}^2\right]}$$

- Πιο σημαντικός στόχος: η ισχύς του θορύβου κβάντισης να είναι μικρή σε σχέση με την ισχύ του αρχικού σήματος (κανονικοποίηση)
- Ορισμός: Λόγος Σήματος προς Θόρυβο Κβάντισης (Signal to Quantization Noise Ratio, SQNR)

$$\boxed{SQNR = \frac{E\left[X^2\right]}{E\left[\tilde{X}^2\right]} = \frac{P_X}{P_{\tilde{X}}}}$$

Υπολογισμός Ισχύος Σήματος

- Πώς υπολογίζεται η ισχύς ενός σήματος;
  1. Ντετερμινιστικό σήμα (σήμα ισχύος)

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt$$

Στην πράξη αρκεί ένα μεγάλο T

  2. Στοχαστικό σήμα

$$P_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E\left[X^2(t)\right]dt$$

» Αν είναι στάσιμο, τότε απλοποιείται ως

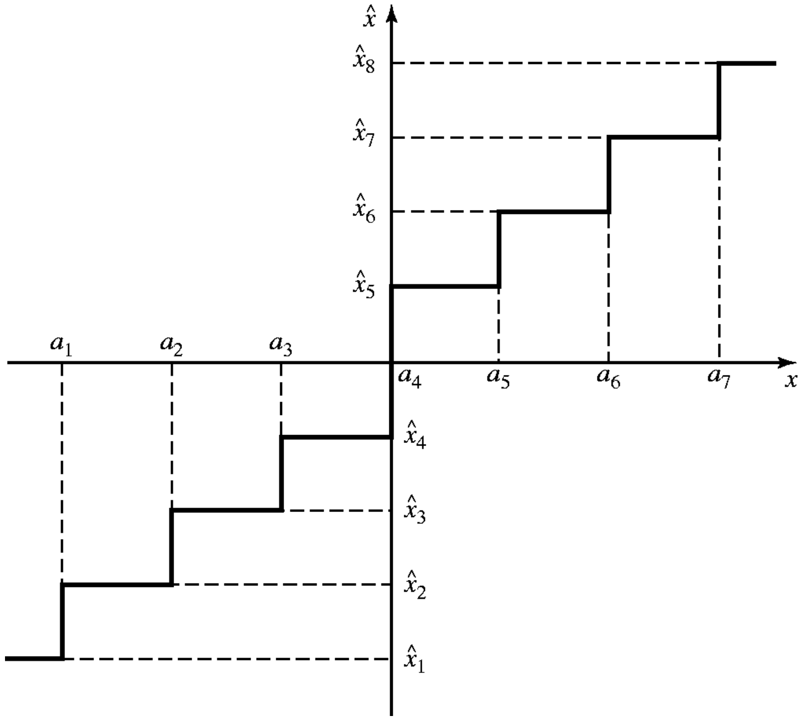
$$P_X = E\left[X^2\right]$$

» Αν είναι στάσιμο και εργοδικό;

» Τότε όπως και στη 1η περίπτωση.

Ομοιόμορφη Κβάντιση

- Είναι η πιο απλή περίπτωση βαθμωτών κβαντιστών
- Οι περιοχές του κβαντιστή, εκτός των δύο ακραίων, έχουν το ίδιο εύρος Δ
- Περιοχές Κβάντισης
  - $R_1=(-\infty,a_1]$
  - $R_2=(a_1, a_1+\Delta]$
  - $R_3=(a_1+\Delta, a_1+2\Delta]$
  - ...
  - $R_N=(a_1+(N-2)\Delta,\infty)$



- Παραμόρφωση:

$$D=\int_{-\infty}^{a_1}\left(x-\hat{x}_1\right)^2 f_X\left(x\right)dx+\sum_{i=1}^{N-2}\int_{a_1+(i-1)\Delta}^{a_1+i\Delta}\left(x-\hat{x}_{i+1}\right)^2 f_X\left(x\right)dx$$
$$+\int_{a_1+(N-2)\Delta}^{+\infty}\left(x-\hat{x}_N\right)^2 f_X\left(x\right)dx$$

Ομοιόμορφη Κβάντιση (2)

- Σχεδίαση ομοιόμορφου κβαντιστή:
  - πρέπει να επιλεγούν οι παρακάτω *(N+2)* παράμετροι

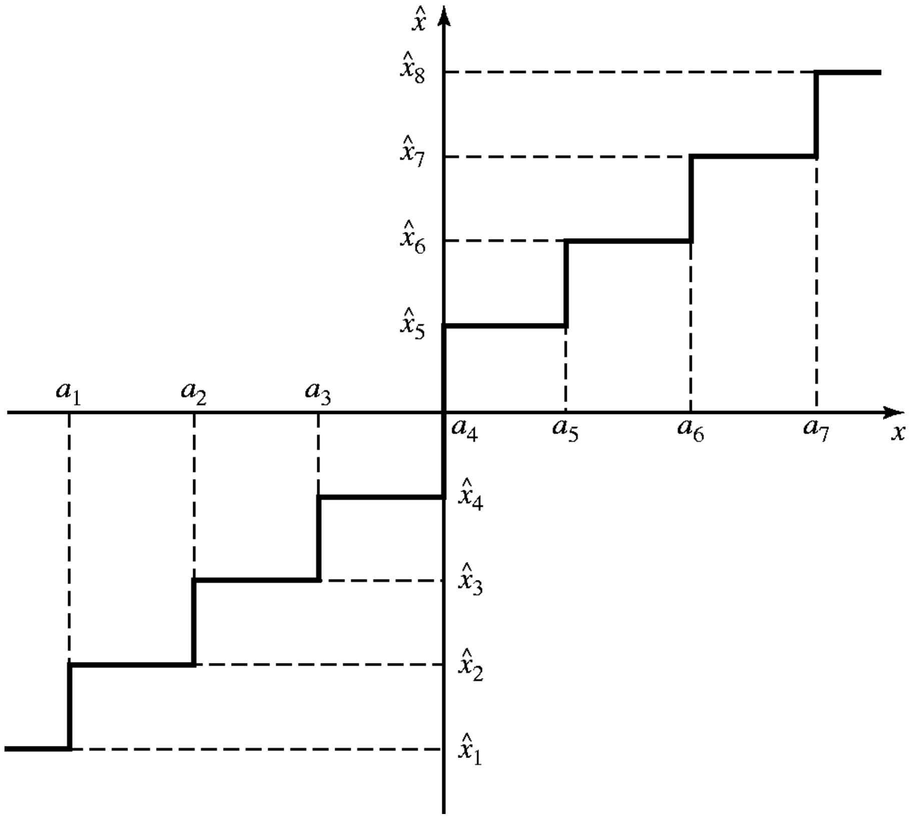
$$\boxed{\Delta, a_1, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_N}$$

  - παραγώγιση ως προς τις παραμέτρους
  - και επιλογή αυτών που ελαχιστοποιούν την παραμόρφωση

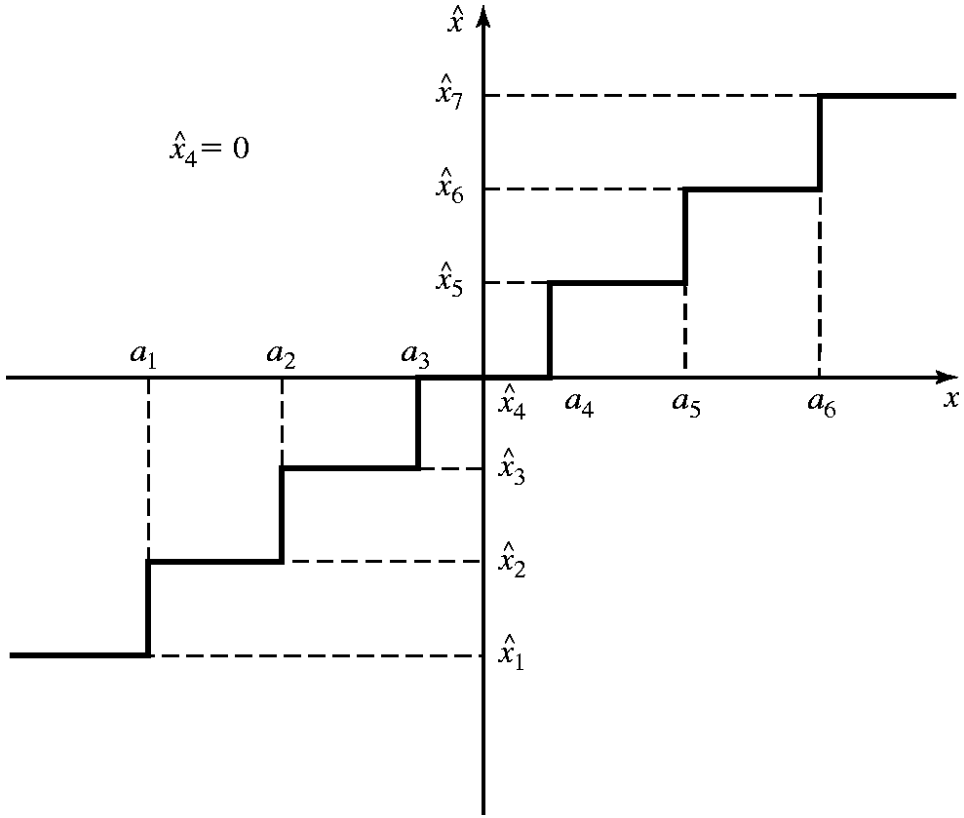
- Απλοποίηση:
  - αν η pdf της πηγής έχει άρτια συμμετρία, ο βέλτιστος κβαντιστής είναι επίσης συμμετρικός, οπότε
  - οι σχεδιαστικές παράμετροι μειώνονται στις μισές περίπου

Ομοιόμορφη Κβάντιση (3)

- Πηγή σε $f_X(x)$ άρτιας συμμετρίας



Ν άρτιο

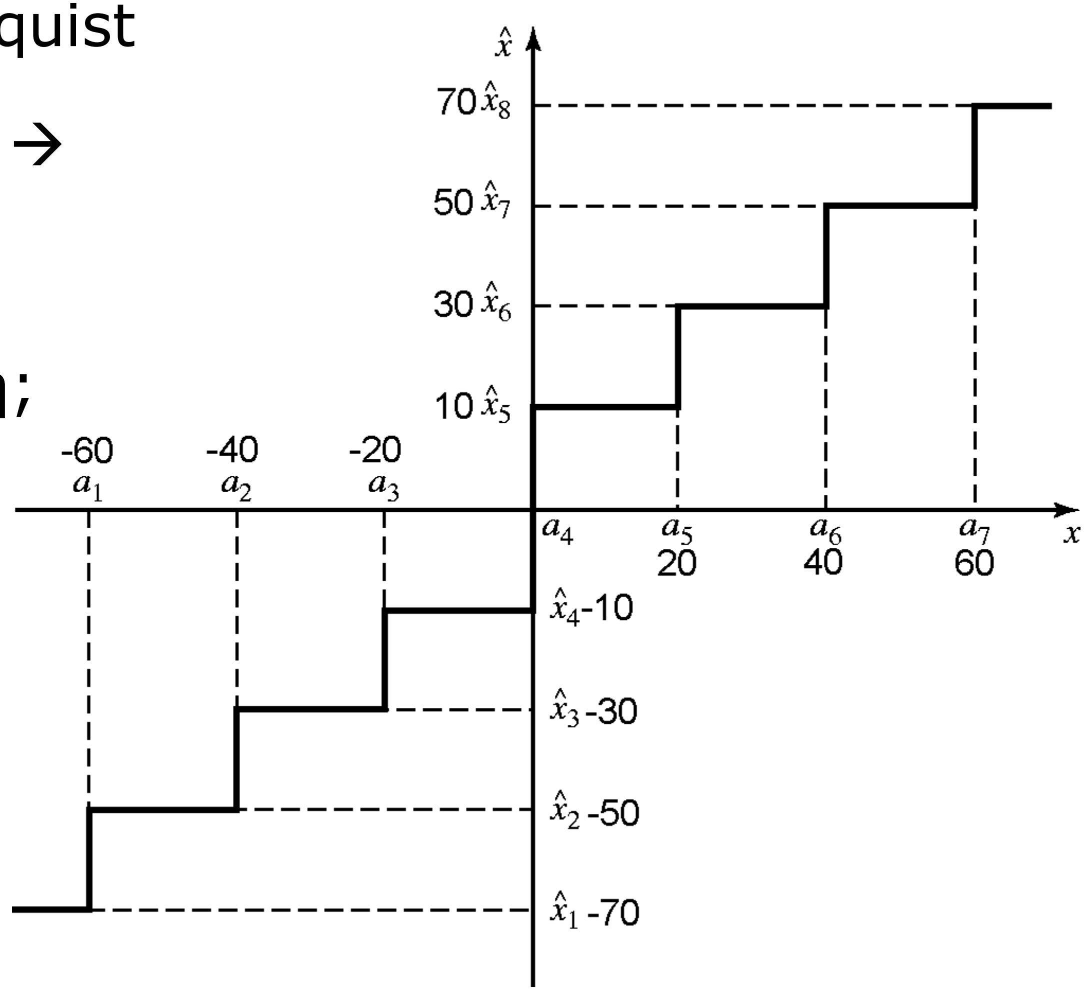


Ν περιττό

- Η ελαχιστοποίηση συνήθως πραγματοποιείται με αριθμητικές μεθόδους

Παράδειγμα: Gaussian Πηγή

- Πηγή *X(t)*, στάσιμη, Gaussian, μηδενικής μέσης τιμής
- Φασματική πυκνότητα ισχύος $S_x(f)=2,\ |f|<100Hz$
- Δειγματοληψία: ρυθμός Nyquist
- Κβάντιση: όπως στο σχήμα →
- Πόσος είναι ο ρυθμός;
- Πόση είναι η παραμόρφωση;



Παράδειγμα: Gaussian Πηγή (2)

- Συχνότητα δειγματοληψίας 200Hz (200 έξοδοι/sec)
- Κβάντιση με 8 στάθμες => 3bits/έξοδο (R = 3bits/sample)
- Ρυθμός κωδικοποίησης 600 bits/sec
- Κάθε δείγμα $X_i \sim N(0,\sigma^2)$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$R(0) = E\left[X_i^2\right] \equiv \sigma^2 = \int_{-100}^{100} 2df = 400$$

- Παραμόρφωση

$$D = E\left[\left(X - \hat{X}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \hat{x}\right)^2 f_X\left(x\right) dx$$

- Με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 400}} e^{-\frac{x^2}{800}}$$

Παράδειγμα: Gaussian Πηγή (3)

- Αντικαθιστώντας, προκύπτει

$$\boxed{D = \sum_{i=1}^{8} \int_{R_i} (x - \hat{x}_i)^2 f_X(x) dx = 33.38}$$

- Η συνάρτηση ρυθμού – παραμόρφωσης για Gaussian πηγές:

$$\boxed{R(D) = \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma^2}{D}} \rightarrow \boxed{D(R) = \sigma^2 2^{-2R} = 6.25 < 33.38} \text{ για } R=3$$

- Πού οφείλεται η διαφορά;
  - το όριο ισχύει για $n \rightarrow \infty$ και όχι για βαθμωτό *(n=1)*
  - τα όρια και οι τιμές κβάντισης δεν είναι τα βέλτιστα
  - οι έξοδοι του κβαντιστή δεν είναι ισοπίθανες, οπότε θα μπορούσαν να κωδικοποιηθούν (συμπιεστούν) περαιτέρω (με κώδικα μεταβλητού μηκους)

Μη Ομοιόμορφη Κβάντιση

- Κεντρική Ιδέα: Χαλαρώνουμε τη συνθήκη και επιτρέπουμε οι περιοχές κβάντισης να μην έχουν το ίδιο εύρος

- Παρατηρήσεις:
  - αν η πηγή δεν είναι ομοιόμορφης κατανομής, δεν υπάρχει λόγος για ομοιόμορφο κβαντιστή
  - λιγότεροι περιορισμοί κατά την ελαχιστοποίηση
  - ο κβαντιστής έχει καλύτερες επιδόσεις

- Σχεδιασμός Κβαντιστή:
  - ελαχιστοποιώ την παραμόρφωση ως προς $\widehat{x}_i$, a_i
  - δηλαδή ως προς (2N-1) παραμέτρους

Μη Ομοιόμορφη Κβάντιση (2)

- Παραμόρφωση

$$D=\int_{-\infty}^{a_1}\left(x-\hat{x}_1\right)^2 f_X\left(x\right)dx+\sum_{i=1}^{N-2}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\left(x-\hat{x}_{i+1}\right)^2 f_X\left(x\right)dx$$
$$+\int_{a_{N-1}}^{+\infty}\left(x-\hat{x}_N\right)^2 f_X\left(x\right)dx$$

- Leibnitz Integral Rule: $\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right)=f(x,b(x))\cdot\frac{d}{dx}b(x)-f(x,a(x))\cdot\frac{d}{dx}a(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt,$
- Παραγωγίζω ως προς a_i και θέτω

$$\boxed{\frac{\partial D}{\partial a_i}=0\Rightarrow a_i=\frac{\hat{x}_i+\hat{x}_{i+1}}{2}} \quad (1)$$

- Συμπέρασμα: τα άκρα των περιοχών κβάντισης είναι ο αριθμητικός μέσος των γειτονικών τιμών κβάντισης
- Ακολούθως, κάθε τιμή *x* κβαντίζεται στην πλησιέστερη τιμή κβάντισης (δηλαδή στην αντιπροσωπευτική τιμή)
- Πώς όμως υπολογίζονται οι τιμές κβάντισης;

Μη Ομοιόμορφη Κβάντιση (3)

- Παραγωγίζω ως προς x_i και θέτω $\boxed{\dfrac{\partial D}{\partial \hat{x}_i} = 0}$

- Προκύπτει

$$\boxed{\hat{x}_i = \frac{\int_{a_{i-1}}^{a_i} x f_X(x)\,dx}{\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_X(x)\,dx} = E\left[X \,\middle|\, a_{i-1} < X \le a_i\right]} \qquad (2)$$

- Συμπέρασμα:
  - οι βέλτιστες τιμές κβάντισης είναι τα "κέντρα μάζας" της κάθε περιοχής κβάντισης (η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή), δηλαδή ο υπό συνθήκη μέσος όρος

Συνθήκες Lloyd-Max

- Οι συνθήκες (1) και (2), δηλαδή ότι:

    1. τα άκρα των περιοχών κβάντισης δίνονται από τον αριθμητικό μέσο των γειτονικών τιμών κβάντισης
    2. οι τιμές κβάντισης είναι οι μέσες τιμές των περιοχών κβάντισης (τα κέντρα μάζας των περιοχών)

  είναι αναγκαίες για να είναι βέλτιστος ένας βαθμωτός κβαντιστής αλλά δεν είναι ικανές.

- δεν προσφέρουν αποδοτικό τρόπο σχεδιασμού του βέλτιστου κβαντιστή και αναλυτική λύση στο πρόβλημα

- Πρόσθετο πρόβλημα:

  Στην πράξη δεν γνωρίζουμε την $f(x)$

Αλγόριθμος Lloyd-Max

- Πρακτική λύση:
  - ένας επαναληπτικός αλγόριθμος (η σχέση του με τον K-means)
  - οι δύο συνθήκες ικανοποιούνται εναλλάξ

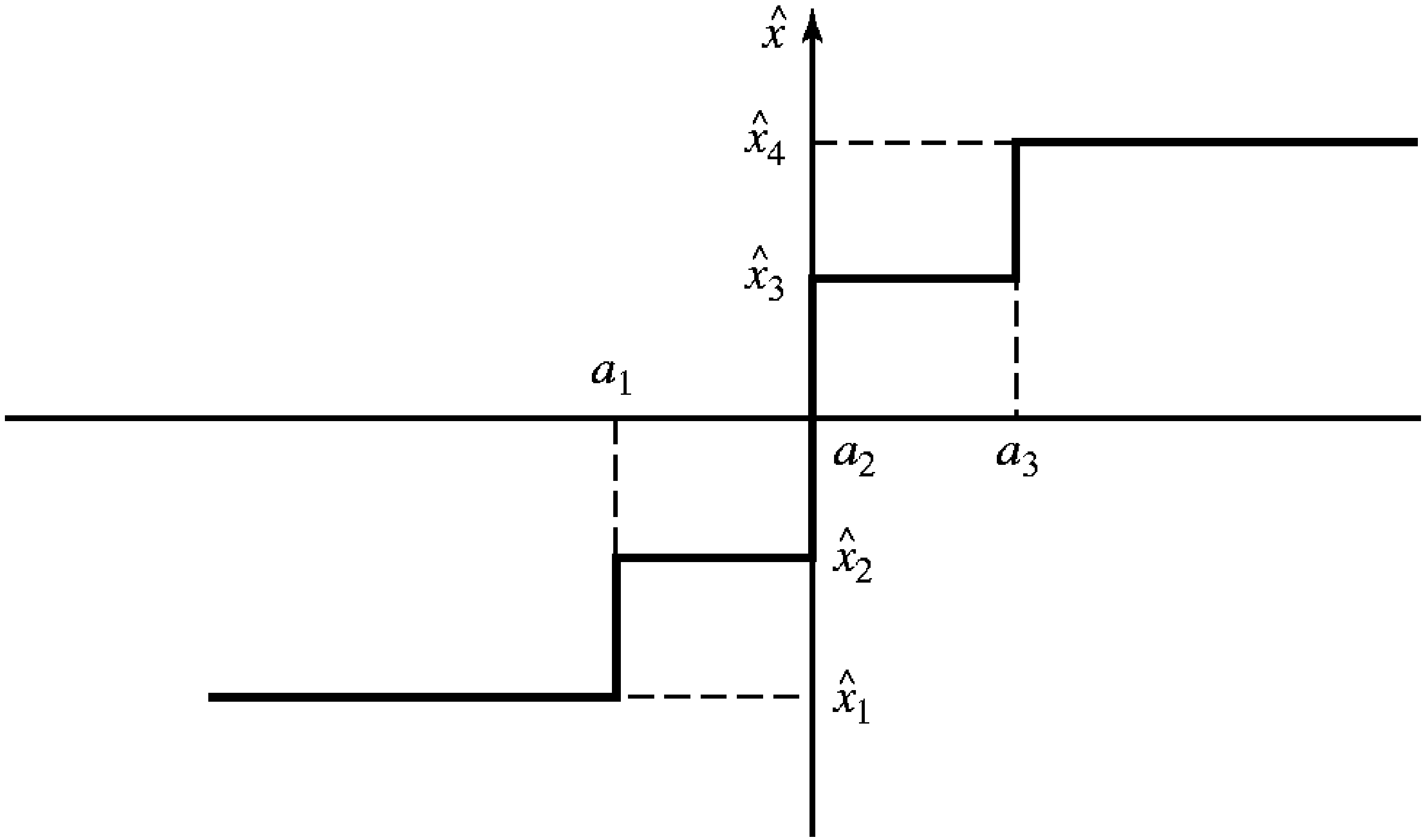
Αλγόριθμος:

1. Επίλεξε τυχαία ή ομοιόμορφα τις περιοχές κβάντισης
2. Υπολόγισε τις τιμές κβάντισης ως τα κέντρα μάζας των περιοχών
3. Υπολόγισε τα άκρα των περιοχών ως το μέσο όρο των γειτονικών τιμών κβάντισης
4. Επανέλαβε τα βήματα 2 και 3 έως ότου συγκλίνει η διαδικασία

- Αποτέλεσμα: με αυτόν τον τρόπο μπορώ να σχεδιάσω το βέλτιστο μη ομοιόμορφο κβαντιστή για οποιαδήποτε πηγή
- Gaussian πηγή: ο μη ομοιόμορφος κβαντιστής πετυχαίνει $D=13.82$ *(θυμίζουμε ότι σύμφωνα με τη Θεωρία R-D είναι $D=6.25$)*

Βαθμωτός vs Διανυσματικός

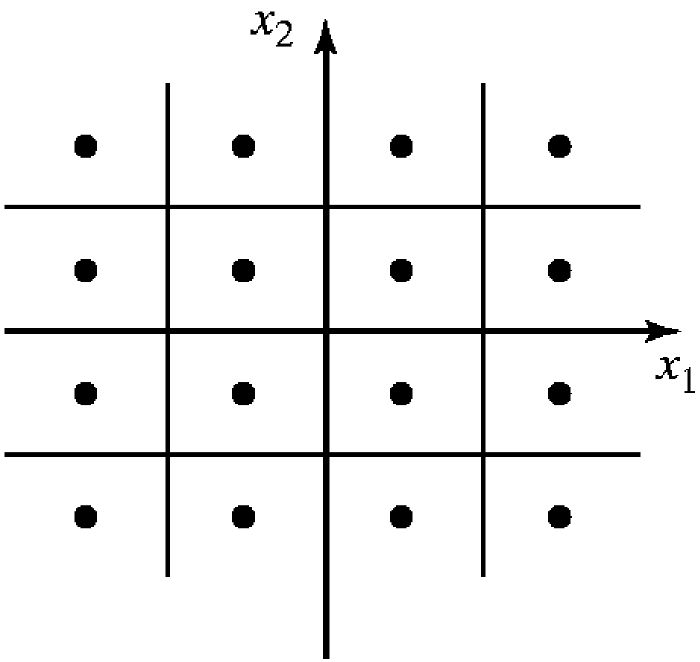
- Βαθμωτή κβάντιση: κάθε έξοδος κβαντίζεται ξεχωριστά
- Παράδειγμα: κβάντιση με 2bits/έξοδο



Βαθμωτός vs Διανυσματικός

- Διανυσματική κβάντιση: μπλοκ εξόδων κβαντίζονται ταυτόχρονα

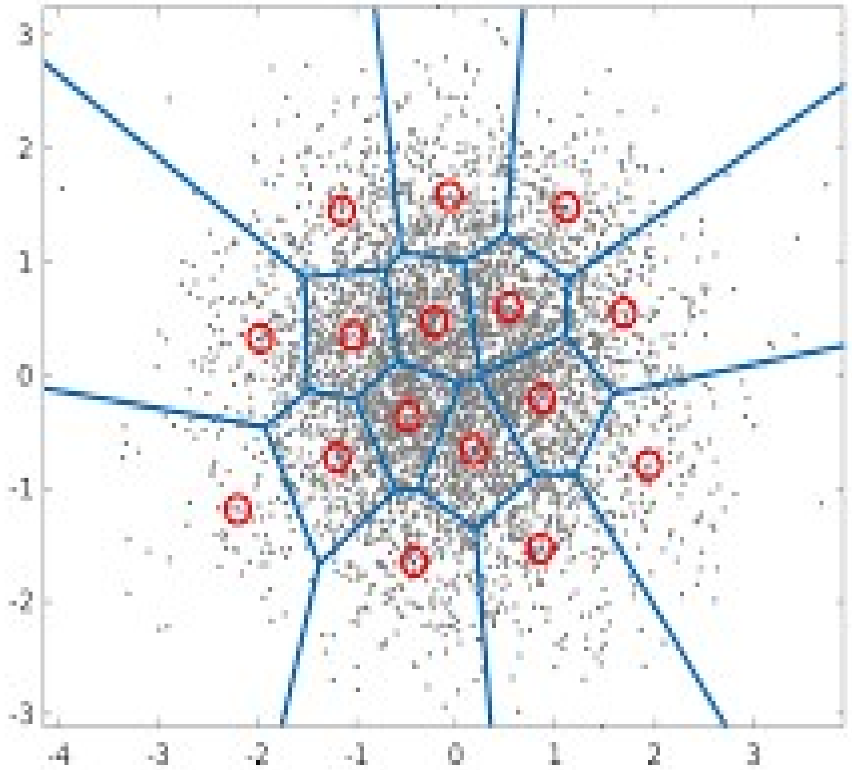
- Παράδειγμα:
  - θεωρούμε δύο δείγματα εξόδου μαζί
  - απεικονίζονται στο επίπεδο
  - χωρίζω το επίπεδο σε 16 περιοχές
  - απαιτούνται 4 bits/ζεύγος εξόδων
  - δηλαδή 2bits/έξοδο
  - ίδιος ρυθμός με τη βαθμωτή αν ήταν με 4 στάθμες



- Ερώτηση: Υπάρχει κέρδος;

Διανυσματική Κβάντιση

- Απάντηση:
  - οι περιοχές μπορεί να μην είναι ορθογώνιες
  - Αν η κατανομή στο επίπεδο ληφθεί υπόψιν τότε
    - » για ίδιο ρυθμό *R*
    - » μπορεί να επιτευχθεί μικρότερη παραμόρφωση κατά την κβάντιση



Διανυσματική Κβάντιση (2)

- Γενίκευση:
  - μπορώ να πάρω *n* δείγματα εξόδου ταυτόχρονα
  - αυτά αναπαρίστανται στον *n*-διάστατο Ευκλείδιο χώρο
  - ο βέλτιστος κβαντιστής σχεδιάζεται στο συγκεκριμένο χώρο
- Ρυθμός:
  - Χωρίζω τον *n*-διάστατο χώρο σε *K* περιοχές
  - απαιτούνται $log_2 K$ bits για να τις δεικτοδοτήσω

$$\boxed{R = \frac{\log_2 K}{n} \text{ bits/έξοδο}}$$

Βέλτιστος Διανυσματικός Κβαντιστής

- Κριτήρια σχεδίασης
  - Γενικεύσεις του βαθμωτού
  1. Η περιοχή R_i είναι το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν συνθήκες εγγύτητας

$$R_i = \left\{ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \left\| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i \right\| < \left\| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_j \right\|, \forall j \neq i \right\}$$

  2. Οι τιμές κβάντιστης είναι τα κέντρα μάζας των περιοχών

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{P\left(\mathbf{X} \in R_i\right)} \int_{R_i} \mathbf{x} f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}$$

- Ο σχεδιασμός του κβαντιστή γίνεται με γενίκευση του επαναληπτικού αλγορίθμου που είδαμε (Lloyd-Max)

Σχόλια

- Η διανυσματική κβάντιση έχει πολλές εφαρμογές, π.χ.
  - κωδικοποίηση ομιλίας, εικόνων, video, κλπ.
  - αναγνώριση προτύπων, clustering

- Η διανυσματική κβάντιση για να είναι αποδοτική προϋποθέτει συσχέτιση μεταξύ των δειγμάτων εξόδου της πηγής (δηλαδή να έχουμε πηγή με μνήμη)
  - γιατί;

- Αποδεικνύεται ότι
  - για στατικές και εργοδικές πηγές,
  - ο βέλτιστος διανυσματικός κβαντιστής
  - προσεγγίζει τα όρια της συνάρτησης ρυθμού παραμόρφωσης για $n \to \infty$

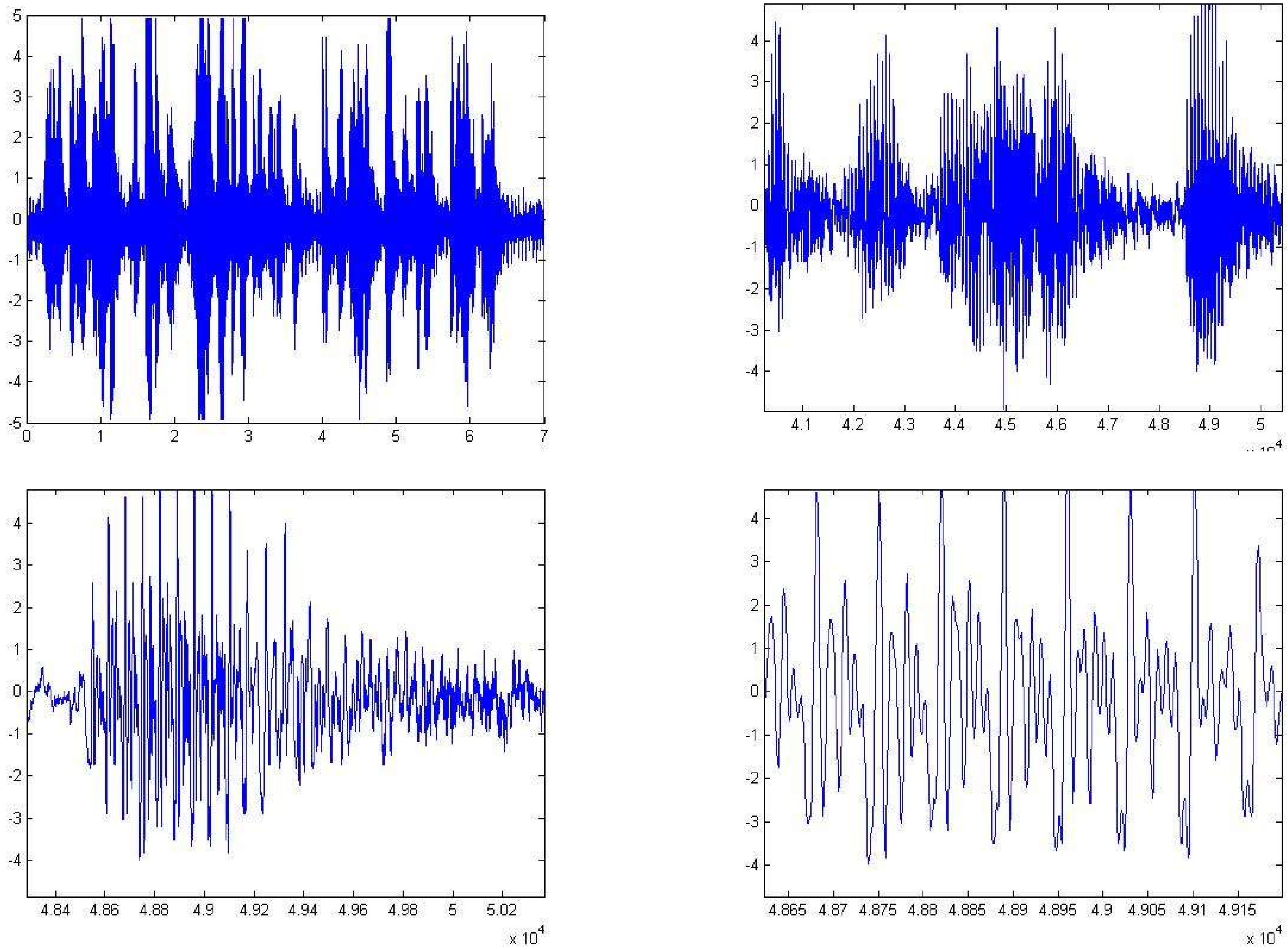
Κωδικοποιητές Κυματομορφής

- Γενική Διάκριση Κωδικοποιητών Αναλογικής Πηγής:
  - Κωδικοποιητές Κυματομορφής
  - Κωδικοποιητές Ανάλυσης-Σύνθεσης
- Κωδικοποιητές Κυματομορφής (PCM, DPCM, Delta κλπ) – Θα τους δούμε αναλυτικά
  - η έξοδος της πηγής θεωρείται μια τυχαία κυματομορφή
  - αρκεί να γνωρίζουμε γενικά χαρακτηριστικά, όπως
    - » εύρος ζώνης
    - » στατιστικά 1ης και 2ης τάξης
    - » φασματική πυκνότητα ισχύος
- Χαρακτηριστικά:
    - » απλοί κωδικοποιητές / γενικής χρήσης
    - » σχετικά υψηλού ρυθμού (μικρή συμπίεση)
- Κωδικοποιητές Ανάλυσης-Σύνθεσης: θα τους δούμε συνοπτικά στη συνέχεια.

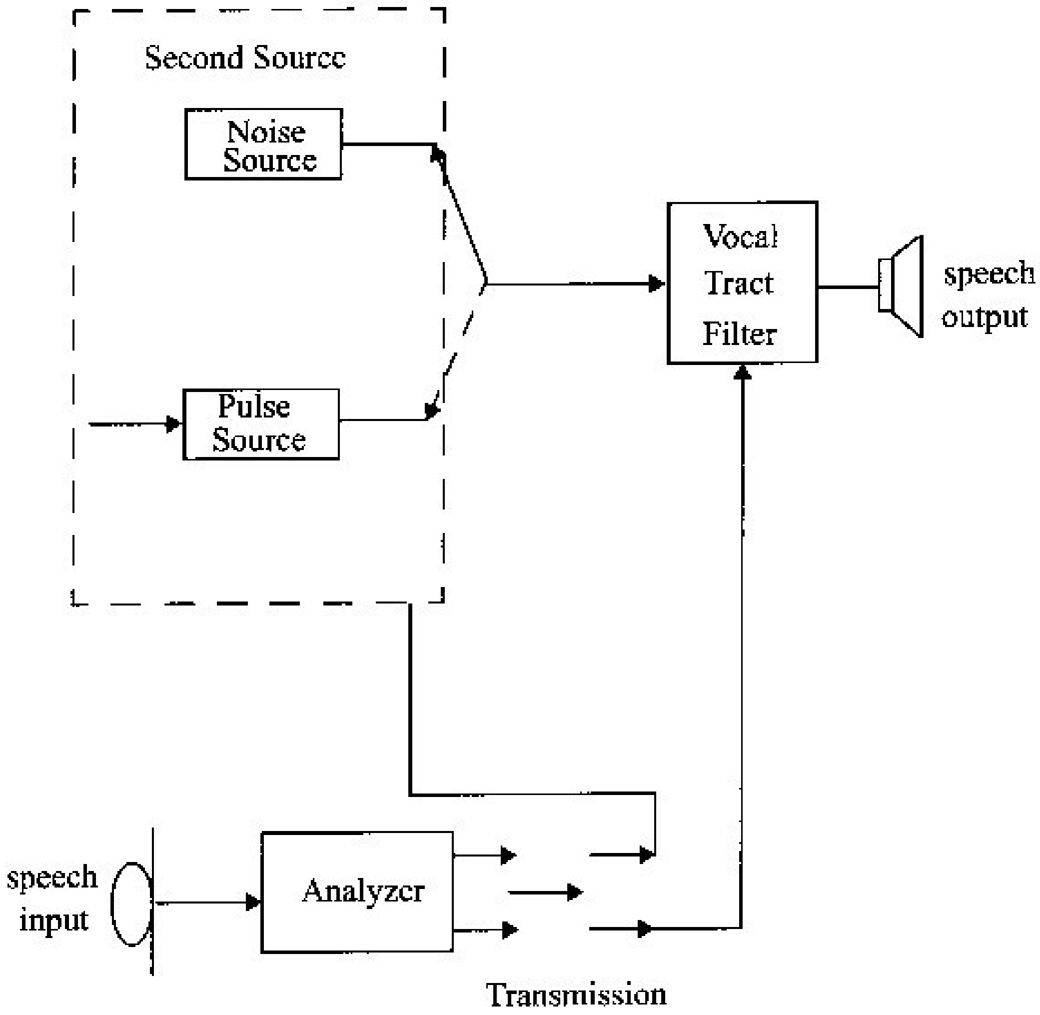
Κωδικοποιητές Ανάλυσης-Σύνθεσης

- Κωδικοποιητές Ανάλυσης - Σύνθεσης
  - θεωρούμε ότι η έξοδος της πηγής παράγεται με κάποιο συγκεκριμένο μοντέλο
  - ο κωδικοποιητής προσπαθεί να παραμετροποιήσει το μοντέλο και να εξάγει τις παραμέτρους
  - αντί να κωδικοποιήσει τα δείγματα, κωδικοποιεί τις παραμέτρους του μοντέλου
- Απαιτήσεις:
  - γνώση του μοντέλου
  - η έξοδος της πηγής να ακολουθεί το συγκεκριμένο μοντέλο
- Χαρακτηριστικά:
  - » σύνθετοι κωδικοποιητές
  - » ειδικού σκοπού (διαφορετικός σχεδιασμός ανά είδος πηγής)
  - » σχετικά χαμηλού ρυθμού (μεγάλη συμπίεση)

Παράδειγμα Σήματος Ομιλίας



Παράδειγμα Σήματος Ομιλίας



- Μηχανισμός παραγωγής ομιλίας
- Αντίστοιχοι κωδικοποιητές φωνής χρησιμοποιούνται στο UMTS, LTE, LTE-A, 5G, κ.λπ.