Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

Θεωρία Πληροφορίας:

Κωδικοποίηση Πηγής

Ψηφιακή Μετάδοση

- Υπάρχουν ιδιαίτερα εξελιγμένες τεχνικές αναλογικής μετάδοσης (που ακόμη χρησιμοποιούνται σε ορισμένες εφαρμογές)
- Επίσης, υπάρχουν Υβριδικές λύσεις (και μάλλον θα υπάρχουν για πολύ ακόμη!)
- Όμως, η ψηφιακή μετάδοση έχει σαφή πλεονεκτήματα, όπως:
  - μεγαλύτερη ανοσία σε θόρυβο, παρεμβολές, παραμορφώσεις
  - ευελιξία στην ανταλλαγή εύρους ζώνης και ισχύος
  - προσφέρει νέες δυνατότητες πολυπλεξίας
  - τεχνικές κρυπτογράφησης και προστασίας
  - ευελιξία στην υλοποίηση σε διάφορες πλατφόρμες υλικού
- Η Ψηφιακή Μετάδοση απαιτεί Ψηφιακά Δεδομένα
- Αν τα δεδομένα είναι Αναλογικά, θα πρέπει να μετατραπούν σε Ψηφιακά
- Ερώτηση: Χάνεται πληροφορία κατά τη μετατροπή A/D;

Θεωρία Πληροφορίας

- Βασικοί Στόχοι στις Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες:
  - η αποδοτική αναπαράσταση των δεδομένων που εξάγει μια πηγή πληροφορίας
  - η αποδοτική μετάδοση της πληροφορίας πάνω από ένα κανάλι
- Με το πρώτο ζήτημα ασχολείται η κωδικοποίηση πηγής (source coding)
  - θα μας απασχολήσει στα αμέσως επόμενα μαθήματα
- Με το δεύτερο ζήτημα ασχολείται η κωδικοποίηση καναλιού (channel coding) και έχουν άμεση σχέση και άλλα υποσυστήματα
  - θα μας απασχολήσει σε μεθεπόμενα μαθήματα
- Τα δύο αυτά αντικείμενα ανήκουν στον ευρύτερο χώρο της Θεωρίας Πληροφορίας (Information Theory)

Claude Shannon “(A→The) Mathematical Theory of Communication"

Κωδικοποίηση Πηγής

- Στόχος: η αποδοτική αναπαράσταση/κωδικοποίηση/συμπίεση της πληροφορίας/σήματος/εξόδου μιας πηγής

- Ερωτήματα που προκύπτουν:
  - πώς ορίζεται η πληροφορία μιας πηγής;
  - μπορώ να τη μετρήσω μαθηματικά;
  - πότε μια πηγή παράγει περισσότερη πληροφορία;
  - τι παθαίνει η πληροφορία μιας πηγής όταν εφαρμόζω κάποια επεξεργασία (π.χ. μετατροπή A/D, περαιτέρω συμπίεση);
  - πόσο πολύ μπορώ να συμπιέσω τα δεδομένα μιας πηγής;
  - Πληροφορία vs ψηφιακά δεδομένα

- Απαντήσεις
  - δίνονται μέσα από τη Θεωρία Πληροφορίας και ιδιαίτερα τη θεωρία και τις τεχνικές κωδικοποίησης πηγής

Πηγές Πληροφορίας

- Η έξοδος της πηγής είναι
  - κάτι τυχαίο και άγνωστο
  - μια τυχαία διαδικασία
- Παραδείγματα ειδών πληροφορίας:
  - Ήχος, ομιλία, εικόνα, video
  - Bits, χαρακτήρες ASCII
  - Βιο-ιατρικά σήματα, Γεωλ. Σήματα, Δεδομένα πλοήγησης,
  - ... και πολλά άλλα.
- Διάκριση ως προς το χρόνο (ή και χώρο):
  - συνεχούς χρόνου (π.χ. σήμα μουσικής)
  - διακριτού χρόνου (π.χ. δείγματα μετρήσεων)
- Διάκριση ως προς τις δυνατές τιμές (αλφάβητο):
  - συνεχείς τιμές (π.χ. αναλογικό σήμα)
  - διακριτές τιμές (π.χ. κείμενο)

Πηγές Πληροφορίας (2)

- Μετατροπή πηγής από συνεχούς σε διακριτού χρόνου
  - δειγματοληψία
  - το σήμα πρέπει να έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης
  - αν είναι κατωπερατό με μέγιστη συχνότητα f_{max}, τότε η συνθήκη Nyquist μας λέει ότι αρκεί να το δειγματοληπτήσω με

$$\boxed{f_s \geq 2 f_{\max}}$$

  - και τότε μπορώ να ανακατασκευάσω το αναλογικό σήμα από τα δείγματα χωρίς απώλειες
- Οι πηγές που μας ενδιαφέρουν,
  - έχουν περιορισμένο εύρος ζώνης
  - ή μπορούμε να το περιορίσουμε εμείς με φιλτράρισμα
- Συμπέρασμα: αρκεί να μελετήσω τις πηγές διακριτού χρόνου
- Ερώτημα: Πώς γίνεται η δειγματοληψία στοχαστικού σήματος;

Πληροφορία

- Εστιάζουμε στις πηγές πληροφορίας με διακριτό αλφάβητο (λόγω ευκολίας αλλά όχι μόνο)
- Θα δούμε και λίγα πράγματα για πηγές με συνεχές αλφάβητο

- Αλφάβητο Διακριτής Πηγής:

$$\boxed{\Phi = \left\{ s_1, s_2, \ldots, s_N \right\}}$$

- Παράδειγμα: Το αλφάβητό μας είναι το αποτέλεσμα δίκαιου ποδοσφαιρικού αγώνα ανάμεσα στις ομάδες

  Μπαρτσελόνα vs Ομάδα CEID

  - s_1: 1
  - s_2: X
  - s_3: 2

Ποιο γεγονός φέρει περισσότερη πληροφορία;

- όταν τυχαίνει το σύμβολο s_1 , το s_2 ή το s_3;
- με τι σχετίζεται η πληροφορία που φέρει κάθε σύμβολο;

Μέτρο Πληροφορίας

1. Η πληροφορία ενός συμβόλου θα πρέπει να είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της πιθανότητας εμφάνισης

2. Μικρή αλλαγή στην πιθανότητα → μικρή αλλαγή στην πληροφορία (συνεχής συνάρτηση)

3. Έστω ότι συνδυάζω δύο πηγές και φτιάχνω μια τρίτη:
   - $Φ_1$: καιρός στην Ιαπωνία το φθινόπωρο
   - $Φ_2$: η παραγωγή δημητριακών στην Ελλάδα
   - Αν είναι ανεξάρτητες, τότε η πληροφορία της σύνθετης πηγής θα πρέπει να είναι το άθροισμα των πληροφοριών των δύο πηγών
   - πιθανότητα σύνθετου συμβόλου

Μέτρο Πληροφορίας

Σύνοψη ιδιοτήτων του μέτρου της πληροφορίας:

1. $\boxed{I\left(s_k\right)=0 \quad for \quad p(s_k)=1}$

2. $\boxed{I\left(s_k\right)\geq 0 \quad for \quad 0\leq p(s_k)\leq 1}$

3. $\boxed{I\left(s_k\right)>I\left(s_l\right) \quad for \quad p(s_k)<p(s_l)}$

4. $\boxed{I\left(s_k,s_l\right)=I\left(s_k\right)+I\left(s_l\right) \quad \varepsilon\alpha\nu \quad s_k,s_l \quad \sigma\tau\alpha\tau\iota\sigma\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \quad \alpha\nu\varepsilon\xi\acute{\alpha}\rho\tau\eta\tau\alpha}$

5. Μικρή αλλαγή στην πιθανότητα → μικρή αλλαγή στην πληροφορία (συνεχής συνάρτηση)

Μέτρο Πληροφορίας (2)

- Πληροφορία (Information) ενός συμβόλου s_i με πιθανότητα εμφάνισης $p(s_i)$

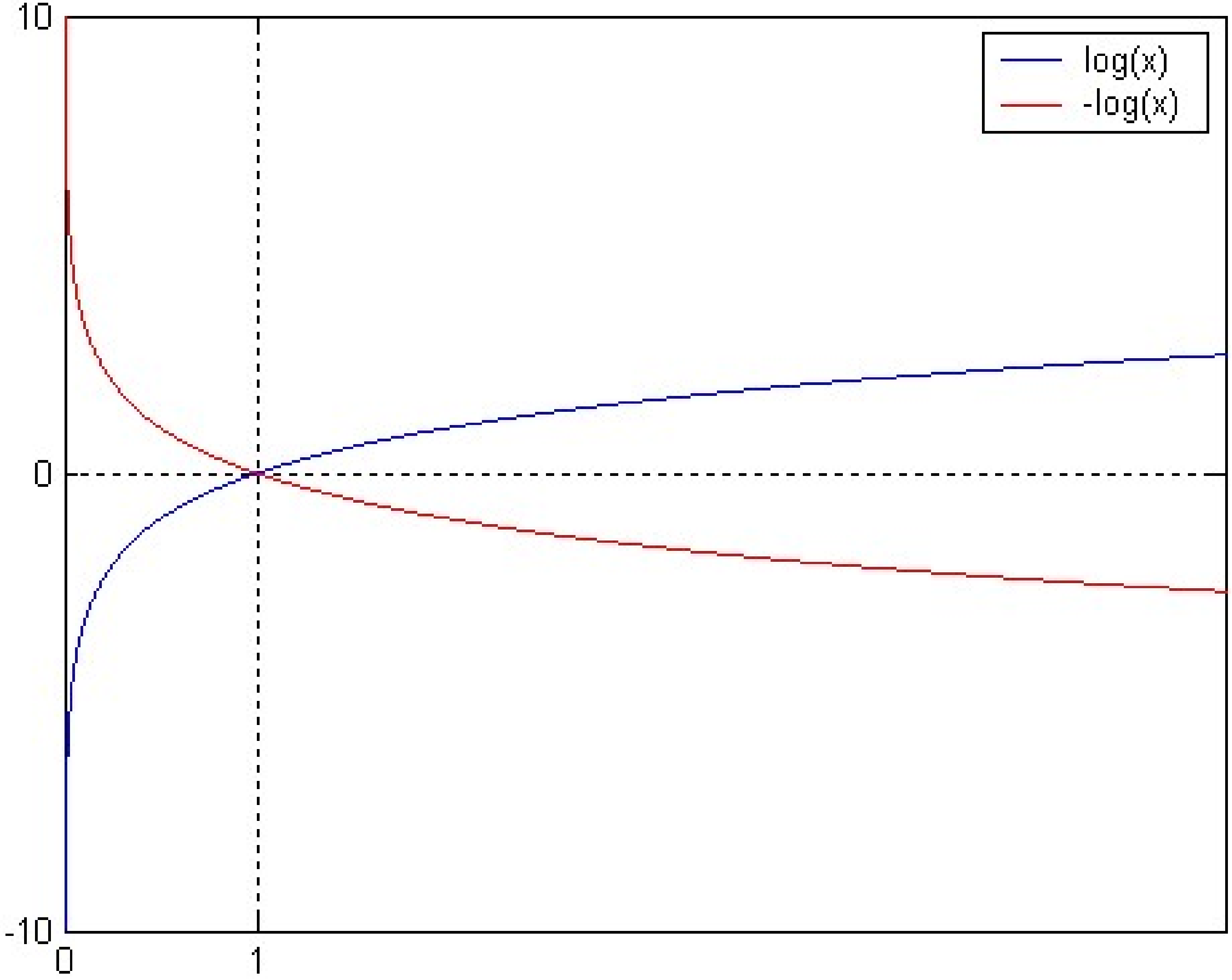
$$I(s_i) = \log \frac{1}{p(s_i)} = -\log p(s_i)$$

- Βάση του λογαρίθμου
  - συνήθως χρησιμοποιείται το 2 με μονάδα μέτρησης bit (1 bit είναι η λαμβανόμενη ποσότητα πληροφορίας όταν προκύπτει ένα από δύο ισοπίθανα σύμβολα μιας δυαδικής πηγής)
  - γενικά δεν ταυτίζεται με το bit που γνωρίζουμε ως δυαδικό ψηφίο

- Σύνθετη πηγή (αν οι αρχικές είναι ανεξάρτητες):

$$I(s_i, a_j) = I(s_i) + I(a_j)$$

Μέτρο Πληροφορίας (3)



Παρατηρήσεις:

1. Φθίνουσα
2. Πεδίο ορισμού (που ορίζεται;)
3. Όρια (τι συμβαίνει στα άκρα;)
4. Είναι συνεχής;

Διακριτή Πηγή Χωρίς Μνήμη

- Discrete Memoryless Source (DMS):
  - διακριτού χρόνου
  - διακριτού αλφαβήτου
  - τα σύμβολα στην έξοδό της είναι ανεξάρτητα
  - ακολουθούν συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας
- Περιγράφεται πλήρως από:
  - το αλφάβητο $\boxed{\Phi = \{s_1, \cdots, s_N\}}$
  - και τις πιθανότητες εμφάνισης $\boxed{\{p_1, \cdots, p_N\}}$
- Ειδικές Περιπτώσεις:
  - Δυαδική Πηγή Χωρίς Μνήμη: $\boxed{\Phi = \{0,1\}}$ $\boxed{\{p, 1-p\}}$
  - Για *p=0.5*, Δυαδική Συμμετρική Πηγή Χωρίς Μνήμη

Εντροπία

- Η εντροπία μιας DMS ορίζεται ως

$$\boxed{H(\Phi) = \sum_{i=1}^{N} p_i I(s_i) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i}$$

- Φυσική Σημασία:
  - εκφράζει τη μέση αβεβαιότητα που έχω για την πηγή
  - είναι ο μέσος όρος της πληροφορίας των συμβόλων
- Όσο μεγαλύτερη εντροπία έχει μια πηγή,
  - τόσο περισσότερη πληροφορία φέρει, και
  - τόσο περισσότερα bits χρειάζονται για την κωδικοποίησή της

Ορισμός της εντροπίας ενός φυσικού συστήματος στην Στατιστική Μηχανική (εκφράζει την μέση ενεργειακή κατάσταση)

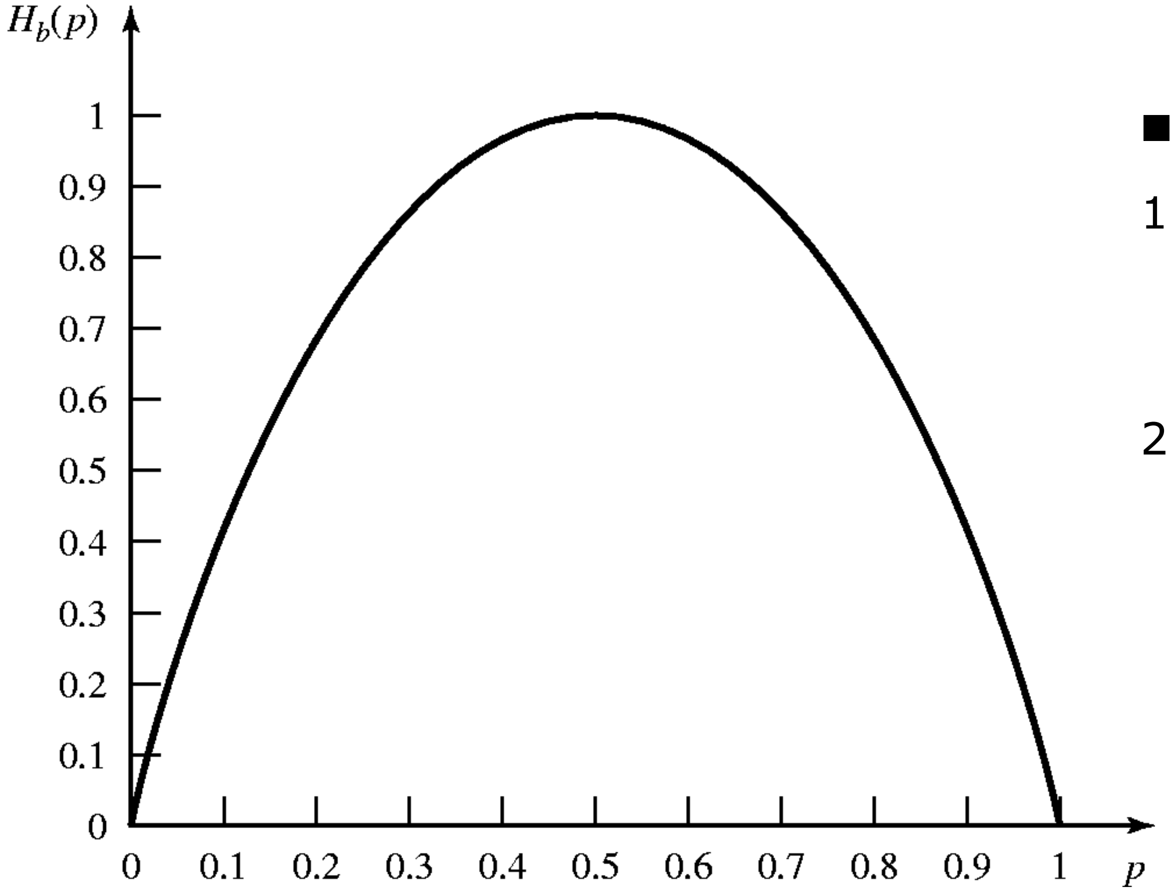
$$\boxed{J = k \ln \Omega}$$

2ος Νόμος Θερμοδυναμικής: *Η εντροπία ενός κλειστού συστήματος που δεν είναι σε ισορροπία τείνει να αυξάνεται.*

Συνάρτηση Δυαδικής Εντροπίας

- Αν έχω δυαδική DMS $\Phi=\{0,1\}$, με πιθανότητες εμφάνισης $\{p,1-p\}$, τότε ορίζεται η συνάρτηση δυαδικής εντροπίας

$$\boxed{H_b(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)}$$



- Παρατηρήσεις:

1. ελαχιστοποιείται όταν $p=0$ ή 1, οπότε $H(0)=H(1)=0$
2. μεγιστοποιείται όταν τα σύμβολα είναι ισοπίθανα, $H(0.5)=1$

Εντροπία Ομοιόμορφης Πηγής

- Είδαμε ότι η εντροπία της δυαδικής DMS μεγιστοποιείται για ισοπίθανα σύμβολα

Γενίκευση: Η εντροπία μιας N-αδικής DMS μεγιστοποιείται όταν τα σύμβολά της ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή $p_i=1/N$ για $i=1,\ldots,N$.

- Συμπέρασμα: Η εντροπία φράσσεται ως

$$\boxed{0 \le H\left(\Phi\right) \le \log_2 N}$$

  – όπου N το πλήθος του αλφαβήτου
  – και το άνω όριο επιτυγχάνεται για ομοιόμορφη πηγή

Διαφορική Εντροπία

- Έστω πηγή διακριτού χρόνου αλλά συνεχούς αλφάβητου
- Έξοδος πηγής: πραγματικός αριθμός, τι σημαίνει αυτό;
- Απαιτούνται άπειρα bits για αναπαράσταση. Συνεπώς, δεν μπορεί να οριστεί η εντροπία
- Ορίζω τη διαφορική εντροπία

$$\boxed{h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 f_X(x)\, dx}$$

  - $f_X(x)$: η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X
  - Η $h(x)$ δεν έχει το διαισθητικό νόημα της εντροπίας
  - μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές

Διαφορική Εντροπία Ομοιόμορφης

- *X* ομοιόμορφα κατανεμημένο στο συνεχές διάστημα *[0,a]*

$$f_X(x) = \frac{1}{a}, \qquad 0 \le x \le a$$

- Διαφορική Εντροπία:

$$h(X) = -\int_0^a \frac{1}{a} \log_2 \frac{1}{a} dx = \log_2 a$$

- Για *a<1*, παίρνει αρνητικές τιμές

Διαφορική Εντροπία Gaussian

- X Gaussian κατανεμημένη $N(0,\sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- Διαφορική Εντροπία:

$$h(X) = \frac{1}{2}\ln\left(2\pi e\sigma^2\right) \ \text{nats} = \frac{1}{2}\frac{\log_2\left(2\pi e\sigma^2\right)}{\log_2 e} \ \text{bits}$$

- Παρατήρηση:
  - Όπως η ομοιόμορφη κατανομή μεγιστοποιεί την εντροπία για τις πηγές διακριτού αλφαβήτου,
  - έτσι η Gaussian κατανομή μεγιστοποιεί τη διαφορική εντροπία για τις πηγές συνεχούς αλφαβήτου.

Ρυθμός Εντροπίας

- Τι γίνεται στην περίπτωση των πηγών με μνήμη;
- Αν X_n η έξοδος της πηγής τη χρονική στιγμή n
- $H(X_2|X_1)$: αβεβαιότητα (καινούργια πληροφορία) που φέρει το X_2, αν γνωρίζω το X_1
- Η ποσότητα $H(X_2|X_1)$ λέγεται υπό συνθήκη εντροπία και θα οριστεί πλήρως σε επόμενα μαθήματα
- Ρυθμός Εντροπίας μιας στάσιμης τυχαίας διαδικασίας

$$\boxed{H(X) = \lim_{n\to\infty} H(X_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})}$$

- Φυσική Σημασία:
  - παίζει το ρόλο της εντροπίας για τις πηγές με μνήμη
  - μέτρο πληροφορίας ανά σύμβολο εξόδου της πηγής
  - συγκλίνει σχετικά γρήγορα (δηλ. για μικρό n)

Κωδικοποίηση Πηγής

- Στόχος: Η αποδοτική αναπαράσταση μιας Μιαδικής πηγής
- Στη γενική περίπτωση αποδοτικές αναπαραστάσεις επιτυγχάνονται με Κώδικες Μεταβλητού Μήκους (ΚΜΜ): Ένας ΚΜΜ αξιοποιεί τη γνώση των στατιστικών ιδιοτήτων της πηγής
- Λειτουργικές απαιτήσεις:
  - Οι κωδικές λέξεις είναι δυαδικές
  - Ο κώδικας είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος
- Μέσο μήκος κώδικα $$\overline{L} = \sum_{i=1}^{N} p(s_i) l(s_i)$$

Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής

- ή «Το Πρώτο Θεώρημα του Shannon» (1948)
- Χρησιμότητα: πόσο μπορούμε να συμπιέσουμε μια πηγή χωρίς να εισάγουμε σφάλματα;

> Θεώρημα: Έστω πηγή με εντροπία H που κωδικοποιείται ώστε να παρέχει ρυθμό $\overline{L}$ *(bits/έξοδο πηγής)*.
>
> –Αν $\overline{L} \geq \mathrm{H}$, η πηγή μπορεί να κωδικοποιηθεί με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα σφάλματος
>
> –Αν $\overline{L} < \mathrm{H}$, όσο πολύπλοκος κι αν είναι ο κωδικοποιητής πηγής, η πιθανότητα σφάλματος θα είναι μακριά από το 0

- Σχόλια:
  - ο Shannon δίνει την ικανή και αναγκαία συνθήκη
  - όμως δεν προτείνει κάποιο αλγόριθμο/μεθοδολογία για να φτιάξουμε έναν κωδικοποιητή όταν $\overline{L} \geq \mathrm{H}$
  - $\overline{L} < \mathrm{H}$: *Data compression, Rate-Distortion Theory*

Απόδειξη Θεωρήματος (1)

- Έστω DMS με αλφάβητο $X=\{a_1,...,a_N\}$ *και πιθαν.* $\{p_1, p_2, \dots p_N\}$
- Παρατηρούμε ταυτόχρονα *n* εξόδους της πηγής (ένα μπλοκ)
- Αν το *n* τείνει στο άπειρο, τότε λογικά αν δω το σύνολο των εξόδων, κάθε σύμβολο εμφανίζεται περίπου τις εξής φορές
  - a_1: np_1
  - a_2: np_2
  - …
  - a_N: np_N
- Αν επαναλάβω το πείραμα,
  - τα σύμβολα προφανώς θα είναι αλλιώς ανακατεμένα
  - όμως προκύπτουν περίπου ίδιες φορές εμφάνισης
- Ορισμός: όλες αυτές οι ακολουθίες
  - ονομάζονται τυπικές ακολουθίες (sample entropy $\approx$ entropy)
  - κάθε μία εμφανίζεται με την ίδια πιθανότητα εμφάνισης (ασυμπτωτικά για μεγάλο *n*)

Απόδειξη Θεωρήματος (2)

- Ερώτηση: πόσες είναι οι τυπικές ακολουθίες;
- Λύση: Κάθε μία από αυτές εμφανίζεται με πιθανότητα

$$p_{typical} \approx \prod_{i=1}^{N} p_i^{np_i} = \prod_{i=1}^{N} 2^{np_i \log_2 p_i} = 2^{n\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i} = 2^{-nH(X)}$$

- Κάθε μη τυπική ακολουθία έχει σχεδόν μηδενική πιθανότητα εμφάνισης (για μεγάλο *n*)
- Επομένως, όλες οι δυνατές ακολουθίες εξόδου είναι τυπικές (και μάλιστα εμφανίζονται ισοπίθανα)
- Αν η πιθανότητα εμφάνισης μίας τυπικής ακολουθίας είναι $p_{typical}$ τότε το πλήθος των τυπικών είναι :

  $K = 1/p_{typical}$

- Άρα, το πλήθος των τυπικών ακολουθιών είναι $\boxed{K = 2^{nH(X)}}$

Απόδειξη Θεωρήματος (3)

- Κωδικοποίηση όλων των δυνατών ακολουθιών

  – το μπλοκ έχει *n* σύμβολα από αλφάβητο των N

  $\Rightarrow$το μπλοκ έχει πλήθος δυνατών ακολουθιών = ;

  N^n δυνατές ακολουθίες
  (ή σύμβολα εκτεταμένης πηγής)

  – Απαιτούνται (πόσα bits/εξοδο);

  $log_2 N^n = n log_2 N$ *bits/μπλοκ* ή $log_2 N$ *bits/έξοδο*

Απόδειξη Θεωρήματος (4)

- Αν όμως το *n* είναι πολύ μεγάλο, μπορώ να αγνοήσω τις μη τυπικές ακολουθίες και να κωδικοποιήσω μόνο τις τυπικές
- Κωδικοποίηση μόνο των τυπικών ακολουθιών (θεωρώντας την κάθε μία από αυτές ως σύμβολο μιας K-αδικής πηγής). Έτσι ο αριθμός των bit μειώνεται σε:
  - $\log_2 K = \log_2(2^{nH(x)}) = nH(X)$ *bits/μπλοκ*
  - $H(X)$ *bits/έξοδο*
- Πότε υπάρχει σφάλμα:
  - αν εμφανιστεί μη τυπική ακολουθία

    (αν όμως το *n* είναι πολύ μεγάλο, η πιθανότητα μη τυπικής - και το σφάλμα - μπορούν να γίνουν οσοδήποτε μικρά)

Ειδικές Περιπτώσεις

- Ομοιόμορφη Πηγή:
  - $H(X)=\log_2 N$
  - δε μπορεί να συμπιεστεί
  - κάθε ακολουθία εξόδου είναι δυνατή (τυπική) και ισοπίθανη

- Πηγές με μνήμη:
  - ο **ρυθμός εντροπίας** παίζει τον ίδιο ρόλο με την εντροπία για στάσιμες πηγές
  - ο ρυθμός εντροπίας συγκλίνει γρήγορα στην τελική τιμή

- Παράδειγμα πηγής με μνήμη: αγγλικό κείμενο
  - για $n=1$ (αγνοώντας τη μνήμη), $H(X)=4.03$ *bits/letter*
  - για μπλοκ γραμμάτων (π.χ. $n=10$) συγκλίνει στην τιμή $H(X)=1.3$ *bits/letter*