

Χρηματοδότηση και Αξιολόγηση Επενδύσεων - 2

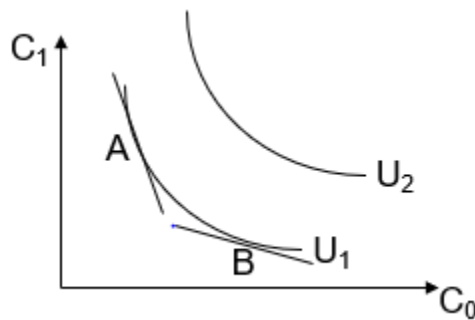
Επενδυτική Συμπεριφορά – Αναμενόμενη Χρησιμότητα

Καμπύλες Αδιαφορίας

Ας υποθέσουμε ότι σε μια οικονομία ο αντιπροσωπευτικός καταναλωτής ζει δύο περιόδους (t_0 και t_1) με διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας $U(C_0, C_1)$, όπου τα C_0 και C_1 αντιπροσωπεύουν το σημερινό και το μελλοντικό επίπεδο κατανάλωσης.

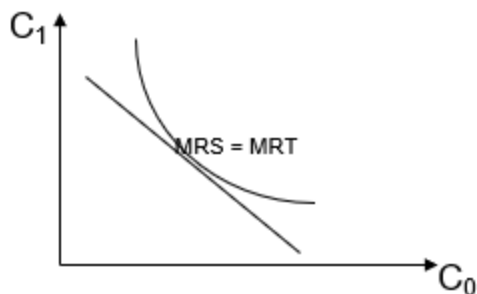
Για τη συνάρτηση χρησιμότητας υποθέτουμε τα γνωστά αξιώματα της οικονομικής θεωρίας, δηλαδή ότι ο καταναλωτής προτιμά να καταναλώσει περισσότερο απ' ότι λιγότερο, ότι η οριακή χρησιμότητα μιας επιπλέον μονάδας κατανάλωσης μειώνεται όσο αυξάνεται το επίπεδο της και ότι ο καταναλωτής έχει κάποιες υποκειμενικές προτιμήσεις ως προς το χρονικό σημείο της κατανάλωσής του.

Όπως γνωρίζουμε η κλίση της εφαπτομένης γραμμής εκφράζει τον οριακό ρυθμό υποκατάστασης (MRS) μεταξύ τρέχουσας και μελλοντικής κατανάλωσης (dC_1/dC_0). Στο σημείο B καταναλώνονται περισσότερες μονάδες τρέχουσας κατανάλωσης σε σχέση με τη μελλοντική, σε αντίθεση με το σημείο A. Ωστόσο, από τη θεωρία της χρησιμότητας, γνωρίζουμε ότι η οριακή χρησιμότητα μιας επιπλέον μονάδας μελλοντικής κατανάλωσης ελαττώνεται καθώς το επίπεδό της αυξάνεται. Καθώς, μετακινούμαστε από το σημείο B προς το σημείο A, απαιτούνται όλο και περισσότερες μονάδες μελλοντικής κατανάλωσης για να υποκατασταθεί μια μονάδα τρέχουσας κατανάλωσης



Επειδή ο οριακός ρυθμός υποκατάστασης είναι ένα υποκειμενικό μέγεθος, για να προσδιοριστεί μία βέλτιστη λύση στο επίπεδο τρέχουσας και μελλοντικής κατανάλωσης θα ληφθεί υπόψη ο εισοδηματικός περιορισμός των καταναλωτών.

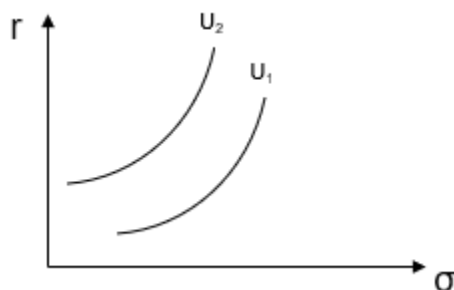
Η κλίση του εισοδηματικού περιορισμού καλείται Οριακός Ρυθμός Μετασχηματισμού (MRT) και παρέχει μια αντικειμενική προσέγγιση αναφορικά με την δυνατότητα αντικατάστασης της τρέχουσας και της μελλοντικής κατανάλωσης.



Λαμβάνοντας υπόψη τα δύο αυτά μεγέθη, τον οριακό ρυθμό υποκατάστασης και τον οριακό ρυθμό μετασχηματισμού, μπορούμε να βρούμε εκείνο το σημείο που ενώ ικανοποιεί τον εισοδηματικό περιορισμό παρέχει τη μέγιστη χρησιμότητα στον καταναλωτή. Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, το σημείο εκείνο που περιγράφουμε προσδιορίζεται από τη κοινή κλίση της συνάρτησης χρησιμότητας και του εισοδηματικού περιορισμού, ήτοι **MRS = MRT**.

Αν προσπαθήσουμε να απεικονίσουμε τη συνάρτηση χρησιμότητας ενός επενδυτή που αποστρέφεται τον κίνδυνο, λαμβάνοντας υπόψη την απόδοση και τον κίνδυνο που ενέχει η επένδυσή του, θα καταλήξουμε σε μία κυρτή μορφή, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα.

Έτσι, για κάθε μονάδα κινδύνου που προστίθενται στο χαρτοφυλάκιό του, απαιτεί υψηλότερη απόδοση. Επιπλέον, καθώς αυξάνεται το επίπεδο του κινδύνου, η απαιτούμενη απόδοση διαμορφώνεται έτσι, ώστε ο οριακός ρυθμός αύξησής της να είναι θετικός.



Κάθε ορθολογικός επενδυτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο, θα προτιμήσει την καμπύλη χρησιμότητας που βρίσκεται επάνω & αριστερά στο διάγραμμα.

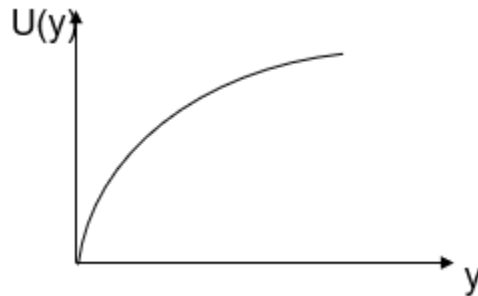
Έστω ένας αντιπροσωπευτικός επενδυτής ο οποίος αποστρέφεται τον κίνδυνο, με συνάρτηση χρησιμότητας, ως προς τον πλούτο y , $U(y)$. Αν του προσφερθεί η δυνατότητα επένδυσης σε ένα σχέδιο που οι ροές του ενέχουν κίνδυνο (μελλοντικό εισόδημα 100 με πιθανότητα 50% ή 110 με πιθανότητα 50%) το αναμενόμενο εισόδημα του επενδυτή θα είναι ίσο με 105 ν.μ.

Στην περίπτωση ισοπίθανων ($p_1 = p_2$) καταστάσεων, το αναμενόμενο εισόδημα του επενδυτή θα είναι ίσο με y . Συμπεριφορά αποστροφής στον κίνδυνο σημαίνει ότι ο επενδυτής δεν θα ήθελε να επενδύσει στο παραπάνω σχέδιο χωρίς κάποια ανταμοιβή, καθώς αυτό ενέχει τον κίνδυνο απώλειας του αρχικού εισοδήματός του. Στην περίπτωση αυτή, αυτός θα προτιμήσει να κρατήσει το αρχικό του εισόδημα και να λάβει επίπεδο χρησιμότητας $U(y)$, με βεβαιότητα. Σε όρους της

συνάρτησης χρησιμότητας, αυτή η συμπεριφορά του επενδυτή συνεπάγεται την ακόλουθη ανισότητα:

$U(y) > 0,5U(y + h) + 0,5U(y - h) = E[U(y, h)]$, όπου ο όρος $E[U(y, h)]$ αποτελεί την αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή αν αναλάβει το σχέδιο που ενέχει κίνδυνο. Δηλαδή, στην περίπτωση ενός δίκαιου παιγνίου, ο επενδυτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο, θα απολαμβάνει μικρότερη χρησιμότητα αν ακολουθήσει την επένδυση που ενέχει κίνδυνο, έναντι της εναλλακτικής της οποίας οι απολαβές δίδονται με βεβαιότητα.

Η συνάρτηση χρησιμότητας $U(y)$ που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση ($U(y) > E[U(y, h)]$) έχει αυστηρά κοίλη μορφή ως προς το εισόδημα. Το επίπεδο χρησιμότητας αυξάνεται με αυτό του εισοδήματος του επενδυτή, αλλά με φθίνοντα ρυθμό. Δηλαδή, $U'(y) = dU(y)/dy > 0$ και $U''(y) = d^2U(y)/d^2y < 0$ (όσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή της $U''(y)$, δηλαδή όσο περισσότερο κοίλη είναι, τόσο πιο *risk averter* είναι ο επενδυτής)

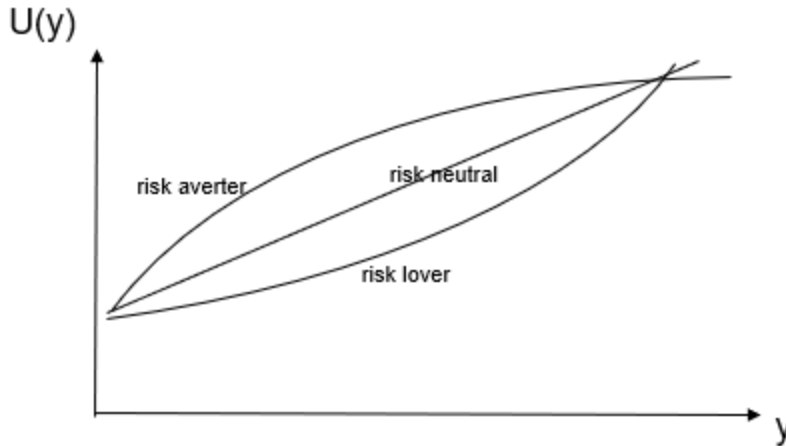


Η οικονομική ερμηνεία αυτών των σχέσεων είναι ότι μια μείωση του εισοδήματος κατά μια μονάδα θα επιφέρει μείωση στο επίπεδο χρησιμότητάς του, η οποία είναι μεγαλύτερη σε απόλυτο μέγεθος από την αύξηση αυτής που προκύπτει από την αύξηση του εισοδήματος κατά μία μονάδα.

Καμπύλες Αδιαφορίας

Ανάλογα με την επενδυτική συμπεριφορά των οικονομούντων ατόμων θα έχουμε τις εξής μορφές της συνάρτησης χρησιμότητας:

- Αποστροφή στον κίνδυνο:
- Ουδετερότητα στον κίνδυνο
- Προτίμηση στον κίνδυνο



Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε δύο επενδύσεις, την A και την B με τα εξής χαρακτηριστικά: Αναμενόμενος Πλούτος **A** = 1.000 (πιθανότητα 50%) ή 1.500 (50%)

Αναμενόμενος Πλούτος **B** = 1.250 (πιθανότητα 100%)

Παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη αξία των δύο επενδύσεων είναι η ίδια (1.250). Έτσι, θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις, ανάλογα με την επενδυτική συμπεριφορά των οικονομούντων ατόμων:

- Αποστροφή στον κίνδυνο (**risk averter**): B
- Ουδετερότητα στον κίνδυνο (**risk neutral**): A ή B
- Προτίμηση στον κίνδυνο (**risk lover**): A
- Ο επενδυτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο θα απορρίπτει τα δίκαια στοιχήματα (**fair game**).
- Δίκαιο στοιχείο / παίγνιο είναι εκείνο του οποίου η αναμενόμενη αξία είναι ίση με το κόστος του (όπως αυτό που συναντήσαμε νωρίτερα). Αν οι καμπύλες αδιαφορίας, αναφορικά με την αναπαράσταση στις διαστάσεις απόδοσης και κινδύνου ήταν κοίλες, τότε δεν θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε την παραπάνω επενδυτική συμπεριφορά. Η κυρτότητα των καμπύλων αδιαφορίας (απόδοση-κίνδυνος) είναι συνυφασμένη με τα αξιώματα της οικονομικής θεωρίας και χαρακτηρίζει τα οικονομούντα άτομα που αποστρέφονται τον κίνδυνο (**risk averters**).

Κριτήριο Αναμενόμενης Χρησιμότητας

- Το γεγονός ότι μια κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας (ως προς το εισόδημα) μπορεί να αποτυπώσει τη συμπεριφορά ενός επενδυτή που αποστρέφεται τον κίνδυνο απώλειας εισοδήματος μας επιτρέπει να εισαγάγουμε ένα κριτήριο επιλογής επενδυτικών σχεδίων που λαμβάνει υπόψη του τη συμπεριφορά αυτή του επενδυτή κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας. Αυτό είναι το κριτήριο της **Αναμενόμενης Χρησιμότητας**, σύμφωνα με το

οποίο, μεταξύ δύο αμοιβαία αποκλειόμενων σχεδίων, θα επιλεγεί εκείνο που έχει την μεγαλύτερη αναμενόμενη χρησιμότητα.

- Το κριτήριο αυτό λαμβάνει υπόψη του τόσο τις προτιμήσεις του επενδυτή ως προς τον κίνδυνο απώλειας εισοδήματος όσο και την κατανομή πιθανοτήτων των ροών ενός σχεδίου.

■ Κριτήριο Αναμενόμενης Χρησιμότητας

- Παράδειγμα

- Έστω δύο επενδυτικά σχέδια A, B των οποίων οι ροές σε δύο διαφορετικές καταστάσεις της οικονομίας έχουν την ίδια πιθανότητα (50%) να συμβούν, όπως φαίνεται παρακάτω:

| ■ Κατάσταση | 1 | 2 |
|-------------|-----|-----|
| ■ Σχέδιο A | 100 | 150 |
| ■ Σχέδιο B | 90 | 160 |

- Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι η λογαριθμική τότε πιο σχέδιο θα επιλεγεί με βάση το κριτήριο της Αναμενόμενης Χρησιμότητας;

- $E[U(y_A)] = 0,5 \ln(100) + 0,5 \ln(150) = 4,808$

- $E[U(y_B)] = 0,5 \ln(90) + 0,5 \ln(160) = 4,787$

Κριτήριο Αναμενόμενης Χρησιμότητας

Το κριτήριο της αναμενόμενης χρησιμότητας μπορεί να γενικευτεί για k αριθμό καταστάσεων:

$$E(U(y)) = \sum_{i=1}^k [p_i U(y_i)]$$

Το θεώρημα του **von Neumann και Morgenstern** (VNM) αποδεικνύει ότι η συνάρτηση $E[U(y)]$ αποτελεί και αυτή μια συνάρτηση χρησιμότητας η οποία ικανοποιεί βασικές ιδιότητες των προτιμήσεων του καταναλωτή, όπως ασυμμετρία, μεταβατικότητα και συνέχεια.

Μέτρα Αποστροφής του Επενδυτικού Κινδύνου

Η θεωρία χρησιμότητας, εκτός από το ότι μας επιτρέπει να ιεραρχήσουμε τις επενδυτικές μας επιλογές σε καθεστώς κινδύνου, παρέχει ακόμα τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε το απόλυτο μέγεθος κινδύνου που απαιτείται από τον επενδυτή όταν αναλαμβάνει μια επένδυση που ενέχει κίνδυνο. Το μέγεθος αυτό επηρεάζεται από την τιμή της δεύτερης παραγώγου $U''(y)$.

Ωστόσο για τον προσδιορισμό του κινδύνου μιας επένδυσης χρειάζεται να προηγηθεί κάποιο μέτρο αποστροφής του κινδύνου. Προς αυτή την κατεύθυνση οι **Pratt** (1964) και **Arrow** (1971) όρισαν τους συντελεστές αποστροφής κινδύνου (risk aversion coefficients – RAC) σύμφωνα με τη σχέση $R_A = -U''(y)/U'(y)$

(καθώς αυξάνεται η τιμή του R_A , αυξάνεται και η αποστροφή στο κίνδυνο).

Μέτρα Αποστροφής του Επενδυτικού Κινδύνου

Ανάλογα με τη συμπεριφορά των επενδυτών το R λαμβάνει τις ακόλουθες τιμές:

- Risk Averter: $R(y) > 0$
- Risk Neutral: $R(y) = 0$
- Risk Lover: $R(y) < 0$

Μέτρο Αποστροφής του Επενδυτικού Κινδύνου

- Λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας

$$U(y) = \ln(y)$$

$$R(y) = y^{-1}$$

Εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας

$$U(y) = -\exp(-ay), a > 0$$

$$R_A(y) = a$$

Μέτρα Αποστροφής του Επενδυτικού Κινδύνου

Παράδειγμα

Έστω δύο επενδυτές, οι Α και Β, που αποστρέφονται τον κίνδυνο (risk averter) με εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας, αντίστοιχα. Αν το μέτρο αποστροφής στον κίνδυνο σε δεδομένο επίπεδο εισοδήματος y ($y = 10$) του επενδυτή Α είναι 3 φορές μεγαλύτερο από αυτό του επενδυτή Β, να βρεθεί η παράμετρος 'α' της εκθετικής συνάρτησης χρησιμότητας.

Έστω ένας επενδυτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο

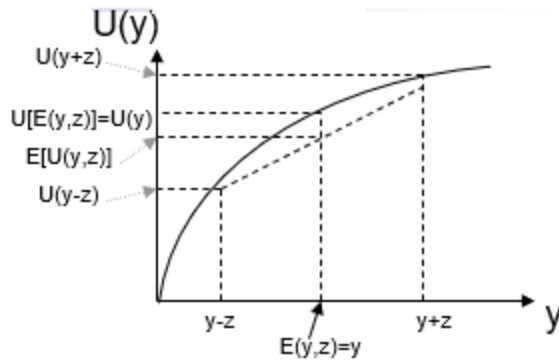
και διαθέτει y ν.μ. Ας υποθέσουμε ότι του προσφέρονται

δύο επενδυτικά σχέδια, το Α και το Β, οι εισροές των οποίων δίδονται ως ακολούθως:

- Η Α επένδυση αποδίδει είτε $y + z$ με πιθανότητα 0,5, είτε $y - z$ με πιθανότητα 0,5.
- Η Β επένδυση αποδίδει με βεβαιότητα y ν.μ.

Η αναμενόμενη απόδοση των δύο επενδύσεων είναι ίση με y ν.μ, ενώ η αναμενόμενη χρησιμότητα των δύο επενδύσεων θα είναι:

- Για την Α επένδυση: $E_A[U(y, z)] = p_1 U(y + z) + p_2 U(y - z) = 0,5U(y + z) + 0,5U(y - z)$
- Για την Β επένδυση: $E_B[U(y)] = U(y)$



Ασφάλιστρο Κινδύνου

Από το σχετικό διάγραμμα παρατηρούμε ότι:

$$E_A[U(y, z)] = E[U(y, z)] < U(y) = E[U(y)] = E_B[U(y, z)]$$

Δηλαδή, αν και οι αναμενόμενες εισροές των δύο επενδύσεων είναι ίσες (δίκαιο στοίχημα), οι αναμενόμενες χρησιμότητές τους διαφέρουν, έτσι ώστε ο risk averter επενδυτής να ικανοποιείται λιγότερο από την επένδυση A που ενέχει κίνδυνο.

Ασφάλιστρο Κινδύνου

Η παραπάνω διαδικασία γενικεύεται ως ακολούθως:

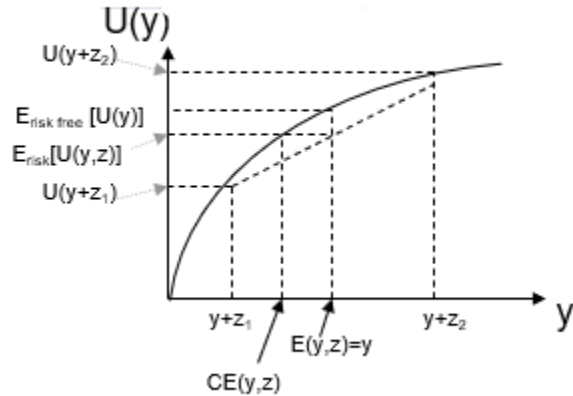
- Επένδυση χωρίς κίνδυνο με βέβαιες εισροές ίσες με y
- Επένδυση με τις ακόλουθες εισροές: $y + z_1$ (με πιθ. p_1) ή $y + z_2$ (με πιθ. p_2)

και αναμενόμενο εισόδημα: $E(y, z) = p_1(y + z_1) + p_2(y + z_2)$ έτσι ώστε να ισούται με y

Η αναμενόμενη χρησιμότητα για τις δύο επενδύσεις θα είναι:

- Επένδυση χωρίς κίνδυνο: $E_{risk-free}[U(y)] = U(y) = U[E(y, z)] = U[p_1(y + z_1) + p_2(y + z_2)]$
- Επένδυση με κίνδυνο: $E_{risk}[U(y, z)] = p_1U(y + z_1) + p_2U(y + z_2)$

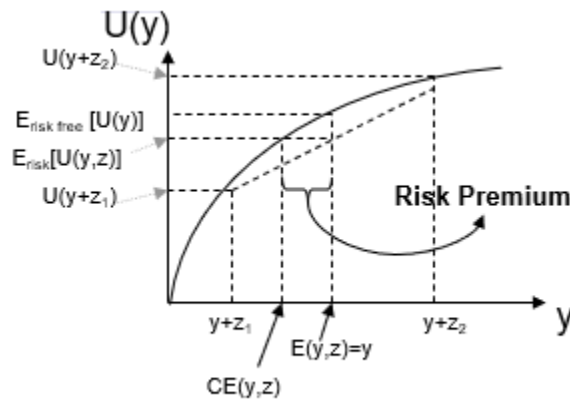
Για έναν επενδυτή που αποστρέφεται τον κίνδυνο, από το σχετικό διάγραμμα παρατηρούμε ότι ισχύει η ανισότητα: $E_{risk-free}[U(y)] = U(y) > E_{risk}[U(y, z)]$



$$E_{risk-free}[U(y)] = U(y) > E_{risk}[U(y, z)]$$

■ Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι θα υπάρξει μία ποσότητα που καλείται **ισοδύναμος με τη βεβαιότητα πλούτος (Certain Equivalent)** τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση:

- Η εισοδηματική αυτή ροή **CE** αποτελεί την χρηματική ροή που αν δινόταν με βεβαιότητα στον επενδυτή θα του πρόσφερε την ίδια χρησιμότητα με την επένδυση που ενέχει κίνδυνο.
- Ο επενδυτής είναι αδιάφορος μεταξύ του να αναλάβει το επενδυτικό σχέδιο που ενέχει κίνδυνο ή να λάβει το σίγουρο ισοδύναμο εισόδημα **CE(y, z)**.



Ασφάλιστρο Κινδύνου

$$E_{risk-free}[U(y)] = U(y) > E_{risk}[U(y, z)]$$

$$U[CE(y, z)] = E_{risk}[U(y, z)]$$

- Έτσι, ορίζουμε την έννοια του ασφαλιστρου για κίνδυνο (**risk premium**) ως τον επιπρόσθετο πλούτο που είναι αναγκαίος ώστε να θεωρηθεί η επένδυση που ενέχει κίνδυνο, ίσης χρησιμότητας με αυτή της βέβαιης επένδυσης:

$$\mathbf{Risk\ Premium} = E(y, z) - [CE(y, z)]$$

- Για κάθε επένδυση με δεδομένο αναμενόμενο πλούτο, επενδυτές με μεγαλύτερη αποστροφή στον κίνδυνο (πιο κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας, σε σχέση με το εισόδημα) θα έχουν μικρότερο **CE** και μεγαλύτερο **Risk Premium** (ασφάλιστρο κινδύνου).

- Παράδειγμα

- Ας υποθέσουμε ότι για έναν risk averter επενδυτή όπου

- ισχύει η λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας προσφέρονται δύο επενδυτικά σχέδια: α) επένδυση Α χωρίς κίνδυνο που θα του αποφέρει 115,6 ν.μ. και β) επένδυση Β που θα του αποφέρει 97 ν.μ. με πιθανότητα 38% ή 127 ν.μ. με πιθανότητα 62%. Ποιό είναι το επιπλέον ποσό χρημάτων που θα απαιτηθεί από τον επενδυτή ως ασφάλιστρο κινδύνου της επένδυσης που ενέχει κίνδυνο;

- $Risk\ Premium = E(y, z) - [CE(y, z)]$

- και $CE: U[CE(y, z)] = E_{risk}[U(y, z)]$ ή $ln(CE) = 0,38ln(97) + 0,62ln(127)$

- ή $CE = 114,64$

- Άρα $Risk\ Premium = 115,6 - 114,64 = 0,961217$

Υπόδειγμα Μέσου – Διακύμανσης

- Harry M. Markowitz (1952), ‘Portfolio Selection’, Journal of Finance, March, pp. 77-91

→ *The Birth of Portfolio Theory*

- Σύμφωνα με το κριτήριο μέσου – διακύμανσης μεταξύ δύο αμοιβαία αποκλεισμένων σχεδίων, θα επιλεγεί το σχέδιο εκείνο του οποίου οι αποδόσεις έχουν μεγαλύτερο μέσο και μικρότερη διασπορά. Αν δεν έχουν ίδιο μέσο (ή διασπορά) τότε συνίσταται να επιλέγεται εκείνο το σχέδιο που έχει τη μικρότερη διασπορά (ή μεγαλύτερο μέσο).

- Πολλές φορές χρησιμοποιείται και ο λόγος της απόδοσης προς την τυπική απόκλιση. Ο λόγος του **Sharpe** = μ/σ , εκφράζει την μέση απόδοση ενός σχεδίου ανά μονάδα κινδύνου του. Δηλαδή, η μέση απόδοση θεωρείται ως η ανταμοιβή που απαιτεί ο επενδυτής για κάθε μονάδα κινδύνου του επενδυτικού σχεδίου που αναλαμβάνει.

- Με βάση το λόγο του Sharpe θα πρέπει να επιλέγεται εκείνο το σχέδιο του οποίου ο λόγος παίρνει μεγαλύτερη τιμή.

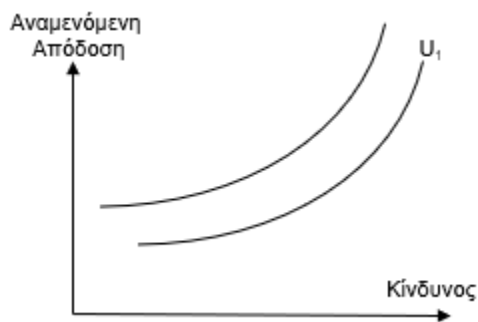
Κάτω από ορισμένες συνθήκες το κριτήριο της αναμενόμενης χρησιμότητας και το κριτήριο του μέσου-διακύμανσης είναι ισοδύναμα για την αξιολόγηση επενδύσεων σε καταστάσεις αβεβαιότητας. Πιο συγκεκριμένα, τα δύο παραπάνω κριτήρια θεωρούνται ως ισοδύναμα στην επιλογή επενδυτικών σχεδίων στις ακόλουθες δύο ξεχωριστές περιπτώσεις:

- Αν η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι τετραγωνικής μορφής
- Αν οι αποδόσεις των επενδυτικών σχεδίων (z) ακολουθούν την κανονική κατανομή

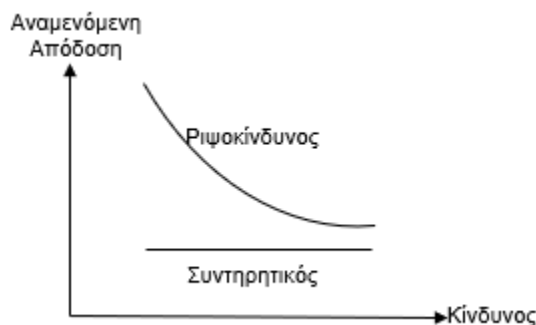
→ Αυτό το συμπέρασμα είναι πολύ χρήσιμο, γιατί με το κριτήριο του μέσου-διασποράς δεν είναι απαραίτητο να κάνουμε παραδοχές και υποθέσεις σχετικά με την συνάρτηση χρησιμότητας των επενδυτών.

Σύμφωνα, με το υπόδειγμα του μέσου-διακύμανσης, όταν ο επενδυτής αποστρέφεται τον κίνδυνο, με αύξηση του κινδύνου μειώνεται η χρησιμότητά του. Επομένως, για να διατηρηθεί σταθερή η χρησιμότητά του, θα πρέπει να αποζημιωθεί με υψηλότερη απόδοση. Δηλαδή, ο επενδυτής για να παραμείνει στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας, θα πρέπει όταν αυξάνεται ο κίνδυνος που ενέχει η θέση του, να αυξάνεται και η αναμενόμενη απόδοσή του.

Εφόσον οι επενδυτές έχουν αποστροφή στον κίνδυνο θα είναι πάντα πρόθυμοι να ανταλλάξουν κάποια μείωση σε αναμενόμενη απόδοση με μια μείωση του κινδύνου. Έτσι, για αυτούς τους επενδυτές η απεικόνιση της σχέσης μεταξύ απόδοσης και κινδύνου θα αποτελεί την συνάρτηση χρησιμότητας:



Στην περίπτωση των άλλων δύο περιπτώσεων επενδυτών, των συντηρητικών και των ριψοκίνδυνων, η γραφική απεικόνιση της συνάρτησης χρησιμότητας, αναφορικά με την απόδοση και τον κίνδυνο των επενδύσεών τους, θα είναι η ακόλουθη:



Διαφοροποίηση

- Όπως είδαμε και νωρίτερα η διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{portfolio}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

- Εναλλακτικά, αν απομονώσουμε τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου (διασπορές) από τα μη-διαγώνια στοιχεία (συνδιακυμάνσεις) του πίνακα Διακύμανσης – Συνδιακύμανσης θα προκύψει η σχέση:

$$\begin{aligned} \sigma_{portfolio}^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{j=1}^n (w_j^2 \sigma_j^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (w_i w_j \sigma_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^n (w_j^2 \sigma_j^2) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n (w_i w_j \sigma_{ij}) \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε ότι οι διακυμάνσεις των μετοχών είναι όλες ίσες (σ^2), ότι οι συνδιακυμάνσεις όλων των ζευγαριών των μετοχών είναι ίσες (cov) και ότι τα στοιχεία του χαρτοφυλακίου είναι ισοκατανεμημένα ($w_i = 1/n$) τότε προκύπτει η σχέση:

$$\sigma_{portfolio}^2 = \frac{1}{n} \sigma^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) cov$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται ($n \rightarrow \infty$) οι μεμονωμένες διακυμάνσεις εξαλείφονται, ενώ η συνδιακύμανση μεταξύ των μετοχών παραμένει.

Καθώς αυξάνει το πλήθος των μετοχών ο **ειδικός κίνδυνος** κάθε μετοχής εξαλείφεται (λόγω της διαφοροποίησης), αυτό που δεν εξαλείφεται ωστόσο είναι ο **συστηματικός κίνδυνος**.

- **Ειδικός κίνδυνος** είναι το μέρος του κινδύνου που ενέχει μία μετοχή, άρα και η εταιρεία της οποίας η μετοχή αποτελεί αντικείμενο διαπραγμάτευσης και αναφέρεται στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της, όπως είναι για παράδειγμα η μορφή της διοίκησης που ασκείται, η τεχνογνωσία, η υλικοτεχνική υποδομή, ο κλάδος που ανήκει η εταιρεία, ακραία φυσικά φαινόμενα κλπ.
- **Συστηματικός κίνδυνος** είναι το μέρος του κινδύνου που σχετίζεται με την συνδιακύμανση μεταξύ των μετοχών του χαρτοφυλακίου. Πιο συγκεκριμένα, το μέρος αυτό του κινδύνου δεν διαφοροποιείται με τη δημιουργία χαρτοφυλακίων γιατί σχετίζεται με χρηματοοικονομικές & μακροοικονομικές μεταβλητές, όπως είναι ο κίνδυνος αγοράς, που επηρεάζουν ταυτόχρονα όλες τις μετοχές (φυσικά με διαφορετικό τρόπο κάθε μία).

Τα οφέλη από τη διαφοροποίηση για τα χαρτοφυλάκια που αποτελούνται από δύο μετοχές, φαίνονται παρακάτω, ιδιαίτερα στη περίπτωση όπου έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση των αποδόσεων των δύο μετοχών:

- $\rho_{12} = 1$ (τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση)
 $\sigma_{portfolio} = w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2$ δεν έχουμε όφελος διαφοροποίησης
- $\rho_{12} = 0$ (ασυσχέτιστες μεταβλητές)
 $\sigma_{portfolio}^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2$ υπάρχουν κάποια οφέλη διαφοροποίησης
- $\rho_{12} = -1$ (τέλεια αρνητική συσχέτιση)
 $\sigma_{portfolio} = w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2$ βέλτιστο όφελος διαφοροποίησης

Παράδειγμα

Έστω δύο μετοχές με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Μετοχή Α: αναμενόμενη απόδοση 7% & τυπική απόκλιση 5%
- Μετοχή Β: αναμενόμενη απόδοση 12% τυπική απόκλιση 14%

Να υπολογιστεί η αναμενόμενη απόδοση & ο κίνδυνος (σ) του χαρτοφυλακίου που αποτελείται κατά 50% από τη μετοχή Α και 50% από τη μετοχή Β, όταν ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων των δύο μετοχών είναι α) $\rho = 1$, β) $\rho = 0$ & γ) $\rho = -1$.

Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$R_{port} = 0,5 \cdot 0,07 + 0,5 \cdot 0,12 = 9,5\%$$

Με εφαρμογή των προηγούμενων τύπων, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου θα είναι:

α) $\sigma = 0,9\%$

β) $\sigma = 0,6\%$

γ) $\sigma = 0,2\%$

Παράδειγμα (...συνέχεια)

Από το παράδειγμα παρατηρούμε ότι, για δεδομένα ποσοστά συμμετοχής της μετοχής Α και Β στο χαρτοφυλάκιο, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου είναι θετική συνάρτηση του συντελεστή συσχέτισης. Η διαφορά μεταξύ του επιπέδου του κινδύνου όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι 0 ή -1 (ή γενικότερα μικρότερος της μονάδας) και του επιπέδου του κινδύνου όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι ίσος με 1, αντιπροσωπεύει τα οφέλη από τη διαφοροποίηση.

Όταν λοιπόν εξετάζουμε τον κίνδυνο μιας επένδυσης μέσα στα πλαίσια ενός χαρτοφυλακίου δεν μας ενδιαφέρει ολόκληρος ο κίνδυνος της επένδυσης αλλά μόνο εκείνο το μέρος του κινδύνου κατά το οποίο αυξάνεται ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου.